



THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

510.6
C1
V. 42

MATHEMATICS
DEPARTMENT

Return this book on or before the
Latest Date stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books
are reasons for disciplinary action and may
result in dismissal from the University.


University of Illinois Library

~~JUN 4 1998~~

SEP 06 1990

AUG 10 1991

JUL 26 1999



Digitized by the Internet Archive
in 2021 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

RENDICONTI
DEL
CIRCOLO MATEMATICO
DI PALERMO

DIREZIONE E REDAZIONE:
30, VIA RUGGIERO SETTIMO — PALERMO (ITALIA).

Tipografia Matematica di Palermo — Piazza Regalmici, Vicolo Guccia, 11, Palermo (Italia).

Direttore-Proprietario: GAETANO SENATORE.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO
DI PALERMO

FONDATORE: G. B. GUCCIA

DIRETTORE FF.: M. DE FRANCHIS.

TOMO XLII



PALERMO,
SEDE DELLA SOCIETÀ

30, VIA RUGGIERO SETTIMO, 30.

—
1917

COMITATO DI REDAZIONE

PEL TRIENNIO 1912-1913-1914.

Residenti:

M. L. ALBEGGIANI. — G. BAGNERA. — M. DE FRANCHIS. — M. GEBBIA.

Non Residenti:

E. BERTINI (Pisa). — L. BIANCHI (Pisa). — É. BOREL (Paris). — C. CARATHÉODORY (Göttingen). — G. CASTELNUOVO (Roma). — U. DINI (Pisa). — F. ENRIQUES (Bologna). — L. FEJÉR (Budapest). — A. R. FORSYTH (London). — I. FREDHOLM (Stockholm). — J. HADAMARD (Paris). — D. HILBERT (Göttingen). — G. HUMBERT (Paris). — F. KLEIN (Göttingen). — E. LANDAU (Göttingen). — T. LEVI-CIVITA (Padova). — A. LIAPOUNOFF (St.-Petersbourg). — G. LORIA (Genova). — A. E. H. LOVE (Oxford). — R. MARCOLONGO (Napoli). — F. MERTENS (Wien). — G. MITTAG-LEFFLER (Stockholm). — E. H. MOORE (Chicago, Ill.). — M. NOETHER (Erlangen). — W. F. OSGOOD (Cambridge, Mass.). — E. PASCAL (Napoli). — É. PICARD (Paris). — S. PINCHERLE (Bologna). — G. SCORZA (Parma). — C. SEGRE (Torino). — F. SEVERI (Padova). — C. SOMIGLIANA (Torino). — P. STÄCKEL (Heidelberg). — W. STEKLOFF (St.-Petersbourg). — C. STÉPHANOS (Athènes). — Ch.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN (Louvain). — G. VIVANTI (Pavia). — W. WIRTINGER (Wien). — H. G. ZEUTHEN (København).

Direttore ff. dei Rendiconti: M. DE FRANCHIS.

SULLE SUPERFICIE CHE AMMETTONO PER SEZIONI PIANE
UNA SEMPLICE INFINITÀ DI CURVE PREFISSATE.

Memoria di **Vittorio Strazzeri** (Palermo).

Adunanza del 12 agosto 1916.

INTRODUZIONE.

In questa Memoria ci proponiamo di studiare le superficie che ammettono per sezioni piane le curve di un prefissato sistema piano, semplicemente infinito.

A tal uopo nel Capitolo I cerchiamo in prima la condizione necessaria e sufficiente cui debbono soddisfare i coefficienti delle due forme differenziali che determinano intrinsecamente una superficie, affinché le linee di uno dei due sistemi, cui essa è riferita, siano linee piane.

Dimostriamo allora che, *assegnata una superficie e su di essa un sistema di sezioni piane esiste una sola rappresentazione piana di essa tale che alle curve del sistema corrispondano curve uguali ed alle loro traiettorie ortogonali le traiettorie ortogonali del sistema piano corrispondente.*

Le formole relative a questa corrispondenza conducono allo studio di due casi notevoli: quello in cui le sezioni piane sono tutte uguali e l'altro in cui esse sono linee rette. Il primo di questi casi conduce allo studio delle modanate, che trattiamo nel Capitolo III, mentre nel Capitolo I ci limitiamo a stabilire che, *se una superficie ammette un sistema di geodetiche piane queste (che sono su di essa linee di curvatura) sono tutte uguali.* Nell'altro caso, cioè in quello delle superficie rigate ci contentiamo di dimostrare in modo semplicissimo la cosiddetta legge di distribuzione dei piani tangenti.

Nel Capitolo II supponiamo dato in un piano un sistema di curve (C_u) una curva S_1 ed inoltre una corrispondenza biunivoca tra le curve C_u ed i punti di S_1 .

Torcendo allora questa (senza alterarne la flessione) nel movimento, che ne nasce, il piano osculatore della curva in ogni suo punto P trasporta seco la curva C_u corrispondente a P . Le curve C_u verranno così a costituire una superficie tale che le traiettorie ortogonali delle sue sezioni C_u vengono a corrispondere, come dimostriamo, alle traiettorie ortogonali del sistema piano (C_u) prefissato.

Quando adunque è dato il sistema piano (C_u) la costruzione della superficie di-

pende dalla scelta di S_1 , dalla corrispondenza tra i punti di essa e le curve del sistema (C_u), e dalla torsione cui si assoggetta la S_1 .

Delle superficie così costruite diamo le equazioni intrinseche e le equazioni parametriche in termini finiti.

Nel capitolo III studiamo il caso in cui il sistema piano (C_u) si riduce ad una sola curva. La precedente costruzione ci dà allora manifestamente le cosiddette superficie modanate.

Facciamo lo studio di queste superficie partendo solo dalla forma dell'elemento lineare e concludiamo che si possono distinguere in due classi: una costituita dalle modanate che non si possono applicare su altre modanate in modo che si vengano a sovrapporre le curve generatrici, e l'altra costituita dalle modanate per cui questa applicabilità è possibile.

Le superficie della prima classe sono quelle che ammettono per superficie direttrice la più generale sviluppabile rigata o un cono e quelle della seconda un cilindro.

Tra queste cerchiamo quelle applicabili l'una all'altra nel senso predetto e che ammettono lo stesso cilindro direttore e troviamo che ciò è solo possibile quando la sezione di questo cilindro è una curva il cui raggio di curvatura è uguale al prodotto del quadrato dell'arco per una funzione periodica del logaritmo dell'arco.

Rileviamo inoltre come *le modanate ci forniscono esempi di superficie non applicabili l'una all'altra ma tali che si possono mettere tra loro in corrispondenza biunivoca puntuale in modo che abbiano la stessa curvatura totale nei punti corrispondenti.*

Nel IV Capitolo studiamo la costruzione delle superficie con uno dei sistemi di linee di curvatura piane e cominciamo col dimostrare che, *affinchè un sistema prefissato di curve piane C_u possa condurre ad una superficie, su cui esse siano linee di curvatura, occorre e basta che i centri di curvatura delle loro traiettorie ortogonali, lungo ciascuna C_u , siano in linea retta e che si prenda per curva S_1 precisamente l'involuppo di queste rette.*

Applichiamo questa nozione alla costruzione delle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura circolare e segnaliamo tra queste superficie quelle che sono incontrate dal piano di ciascun circolo, sempre sotto lo stesso angolo; facendo rilevare come, *partendo da un qualsivoglia sistema piano di circoli (C_u), si può costruire una di queste superficie per ogni valore prefissato, diverso da $\frac{\pi}{2}$, dell'angolo in discorso.*

Passiamo infine allo studio delle ciclidi di DUPIN, che noi definiamo come quelle che hanno ambedue i sistemi di linee di curvatura circolari.

Dimostriamo che volendole costruire occorre partire da un sistema di circoli C_u formanti fascio e assumere come linea S_1 l'asse radicale del fascio; ne viene che *la corrispondente rappresentazione piana delle ciclidi è sempre costituita da un doppio sistema di circoli ortogonali.*

Costruiamo poi solo le ciclidi che si possono ottenere partendo da un fascio di circoli C_u con due punti comuni reali e cioè le ciclidi che hanno due punti conici,

dimostrando infine che le due falde dell'evoluta si riducono a due coniche in piani perpendicolari ciascuna passante pei fuochi dell'altra.

A tutto il lavoro ci siamo sforzati di dare una forma elementarissima tenendo nello stesso tempo conto della realtà della superficie.

CAPITOLO I.

Sezioni piane di una superficie.

1. Formole fondamentali e condizione perchè un sistema di linee sopra una superficie sia piano. — Sia data una superficie, riferita ad un suo doppio sistema di linee ortogonali, mediante le sue due forme fondamentali ¹⁾:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

$$D du^2 + D' du dv + D'' dv^2.$$

Indicando con ψ_1 l'angolo della normale alla superficie con la normale principale alla linea u ($v = \text{cost.}$) nello stesso punto, con $\frac{1}{\rho_1}$ la flessione di questa linea e con ψ_2 , $\frac{1}{\rho_2}$ le quantità analoghe relative alla linea v ($u = \text{cost.}$) passante per quel punto, le curvature normali $\frac{1}{R_u}$, $\frac{1}{R_v}$, le curvature geodetiche $\frac{1}{\rho_u}$, $\frac{1}{\rho_v}$ e le torsioni geodetiche $\frac{1}{T_u}$, $\frac{1}{T_v}$, ci sono date dalle formole:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R_u} = \frac{\cos \psi_1}{\rho_1} = \frac{D}{E}, \quad \frac{1}{\rho_u} = \frac{\sin \psi_1}{\rho_1} = \frac{1}{2E\sqrt{G}} \frac{\partial E}{\partial v}, \quad \frac{1}{T_u} = \frac{-D'}{\sqrt{EG}}, \\ \frac{1}{R_v} = \frac{\cos \psi_2}{\rho_2} = \frac{D''}{G}, \quad \frac{1}{\rho_v} = \frac{\sin \psi_2}{\rho_2} = \frac{1}{2G\sqrt{E}} \frac{\partial G}{\partial u}, \quad \frac{1}{T_v} = -\frac{1}{T_u} = \frac{D'}{\sqrt{EG}}. \end{array} \right.$$

Se con $\frac{1}{r_1}$ indichiamo la torsione della linea u si ha ²⁾:

$$\frac{1}{T_u} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} - \frac{1}{r_1},$$

¹⁾ Qui per seconda forma fondamentale adottiamo quella data da L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, vol. I (Pisa, Enrico Spoerri 1902), pag. 114.

²⁾ BIANCHI, loc. cit., pag. 102; E. CESÀRO, *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli, 1896), pag. 152.

e quindi affinchè le linee u siano piane occorre e basta che sia:

$$(2) \quad \frac{1}{T_u} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \psi_1}{\partial u},$$

oppure per le (1):

$$(2') \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial u} = - \frac{D'}{\sqrt{G}}.$$

Dalle prime due delle (1) si deduce:

$$(3) \quad \cot \psi_1 = \sqrt{G} \frac{2D}{\frac{\partial E}{\partial v}}, \quad \frac{1}{\sin^2 \psi_1} = 1 + G \left(\frac{2D}{\frac{\partial E}{\partial v}} \right)^2,$$

e quindi derivando rispetto ad u :

$$-(1 + \cot^2 \psi_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial u} = \sqrt{G} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{2D}{\frac{\partial E}{\partial v}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2D}{\frac{\partial E}{\partial v}} \right),$$

cioè per le (2') e (3):

$$\left[1 + G \left(\frac{2D}{\frac{\partial E}{\partial v}} \right)^2 \right] \frac{D'}{\sqrt{G}} = \sqrt{G} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{2D}{\frac{\partial E}{\partial v}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2D}{\frac{\partial E}{\partial v}} \right)$$

e infine dividendo per \sqrt{G} :

$$(4) \quad \left[\frac{1}{G} + \left(\frac{2D}{\frac{\partial E}{\partial v}} \right)^2 \right] D' = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{2D}{\frac{\partial E}{\partial v}} \right) + \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2D}{\frac{\partial E}{\partial v}} \right),$$

che equivale alla (2).

2. Rappresentazione piana della superficie con la conservazione delle linee di un sistema e dell'ortogonalità di esso col sistema ortogonale. — Vediamo ora se è possibile disporre le linee u , cioè le sezioni piane della superficie, in un piano, cosicchè si venga a stabilire tra il piano e la superficie una corrispondenza punto a punto tale che si corrispondano anche le traiettorie ortogonali delle dette linee u .

Interpretiamo perciò u e v come coordinate curvilinee del piano riferito ad un sistema ortogonale e tale che le linee u ($v = \text{cost.}$) siano precisamente le sezioni piane della superficie.

L'elemento lineare del piano assumerà la forma:

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + G_1 dv^2,$$

e poichè per ogni valore costante di v si debbono avere sul piano e sulla superficie rispettivamente due linee u uguali, possiamo in primo luogo porre: $E_1 = E$.

Osservando poi che la curvatura geodetica di una linea tracciata sopra un piano coincide colla flessione della curva stessa, dovrà per le (1) essere:

$$\left(\frac{1}{2E_1 \sqrt{G_1}} \frac{\partial E_1}{\partial v} \right)^2 = \frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{E^2} \left[\frac{1}{4G} \left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 + D^2 \right],$$

dalla quale, tenendo conto che $E_1 = E$, si ricava:

$$\frac{1}{G_1} = \frac{1}{G} + \left(\frac{2D}{\frac{\partial E}{\partial v}} \right)^2$$

cioè per la seconda delle (3):

$$(5) \quad G_1 = G \sin^2 \psi_1.$$

Introducendo in ds_1^2 le espressioni trovate per E_1 e G_1 , si avrà:

$$(6) \quad ds_1^2 = E du^2 + G \sin^2 \psi_1 dv^2.$$

Dico che questa forma di elemento lineare conviene ad una superficie a curvatura nulla e che quindi la rappresentazione piana cercata è possibile ed è uniforme per ogni sistema di sezioni piane della superficie data.

Per procedere più speditamente scriviamo le formole di CODAZZI e quella di GAUSS, relative alla superficie data, come segue ³⁾:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial s_v} \left(\frac{1}{R_u} \right) + \frac{\partial}{\partial s_u} \left(\frac{1}{T_u} \right) + \frac{2}{T_u \rho_v} = \left(\frac{1}{R_v} - \frac{1}{R_u} \right) \frac{1}{\rho_u}, \\ \frac{\partial}{\partial s_u} \left(\frac{1}{R_v} \right) + \frac{\partial}{\partial s_v} \left(\frac{1}{T_v} \right) + \frac{2}{T_v \rho_u} = \left(\frac{1}{R_u} - \frac{1}{R_v} \right) \frac{1}{\rho_v}, \\ -K = \frac{1}{T_u^2} - \frac{1}{R_u R_v} = \frac{1}{\rho_u^2} + \frac{1}{\rho_v^2} + \frac{\partial}{\partial s_v} \left(\frac{1}{\rho_u} \right) + \frac{\partial}{\partial s_u} \left(\frac{1}{\rho_v} \right), \end{array} \right.$$

ove, come si suole, si è scritto per semplicità: $\frac{\partial}{\partial s_u}$ e $\frac{\partial}{\partial s_v}$ rispettivamente invece di $\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u}$ e di $\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v}$.

Indichiamo con $\frac{1}{\rho_u}$, $\frac{1}{\rho_v}$, \bar{K} , le curvature geodetiche e la curvatura totale relative ad una superficie di cui l'elemento lineare ci sia dato dalla (6).

La curvatura totale \bar{K} ci sarà data da una formola analoga alla terza delle precedenti, la quale, tenuto conto che $G_1 = G \sin^2 \psi_1$, si riduce a:

$$-\bar{K} = \frac{1}{\rho_u^2} + \frac{1}{\rho_v^2} + \frac{1}{\sin \psi_1} \frac{\partial}{\partial s_v} \left(\frac{1}{\rho_u} \right) + \frac{\partial}{\partial s_u} \left(\frac{1}{\rho_v} \right).$$

³⁾ BIANCHI, loc. cit. ¹⁾, pag. 185, E. CESÀRO, loc. cit. ²⁾, pag. 158. Queste formole sono date più comunemente sotto la forma:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial v} D - \frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} D'' + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} \right) D' = 0, \\ \frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} - \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u} D' - \frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} D + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} \right) D' = 0, \\ K = \frac{DD'' - D'^2}{EG} = - \frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right]. \end{array} \right.$$

Calcoliamo ora separatamente i termini del secondo membro di questa relazione. Avremo per le (1), ove si muti G in $G_1 = G \sin^2 \psi_1$:

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\rho_u} &= \frac{1}{\sin \psi_1} \cdot \frac{1}{\rho_u} = \frac{1}{\rho_1} = \left(\frac{1}{R_u^2} + \frac{1}{\rho_u^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \\ \frac{1}{\rho_v} &= \frac{1}{\sin^2 \psi_1} \cdot \frac{1}{2 G \sqrt{E}} \frac{\partial (G \sin^2 \psi_1)}{\partial u} = \frac{1}{\rho_v} + \frac{\cot \psi_1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} = \frac{1}{\rho_v} + \frac{\cot \psi_1}{T_u}, \\ \frac{1}{\sin \psi_1} \frac{\partial}{\partial s_v} \left(\frac{1}{\rho_u} \right) &= \frac{1}{\sin \psi_1} \left(\frac{1}{R_u^2} + \frac{1}{\rho_u^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{R_u} \frac{\partial}{\partial s_v} \left(\frac{1}{R_u} \right) + \frac{1}{\rho_u} \frac{\partial}{\partial s_v} \left(\frac{1}{\rho_u} \right) \right]; \end{aligned} \right.$$

quest'ultima relazione, tenendo presente le espressioni di $\sin \psi_1$ e $\cos \psi_1$ ricavate dalle (1) in funzione di $\frac{1}{R_u}$ ed $\frac{1}{\rho_u}$, si riduce alla:

$$\frac{1}{\sin \psi_1} \frac{\partial}{\partial s_v} \left(\frac{1}{\rho_u} \right) = \cot \psi_1 \frac{\partial}{\partial s_v} \left(\frac{1}{R_u} \right) + \frac{\partial}{\partial s_v} \left(\frac{1}{\rho_u} \right).$$

Finalmente:

$$\frac{\partial}{\partial s_u} \left(\frac{1}{\rho_v} \right) = \frac{\partial}{\partial s_u} \left(\frac{1}{\rho_v} \right) + \cot \psi_1 \frac{\partial}{\partial s_u} \left(\frac{1}{T_u} \right) - \frac{1}{\sin^2 \psi_1} \frac{1}{T_u}$$

cosicchè si avrà, tenendo presente l'espressione (7) di K :

$$(9) \quad -\bar{K} = -K + \frac{1}{R_u^2} - \frac{1}{T_v^2} + \cot \psi_1 \left[\frac{\partial}{\partial s_v} \left(\frac{1}{R_u} \right) + \frac{\partial}{\partial s_v} \left(\frac{1}{T_u} \right) + \frac{2}{T_u \rho_v} \right].$$

Posto ora in questa $-K = -\frac{1}{R_u R_v} + \frac{1}{T_u^2}$ e $\cot \psi_1 = \frac{\rho_u}{R_u}$ in virtù della prima di CODAZZI si avrà, come si voleva provare:

$$\bar{K} = 0.$$

Adunque, escluso per ora il caso che sia $\sin \psi_1 = 0$ è sempre possibile rappresentare una superficie sul piano in modo che ad un suo sistema di sezioni piane corrisponda sul piano un sistema di curve uguali e che alle traiettorie ortogonali del sistema sulla superficie corrispondano le traiettorie ortogonali del sistema corrispondente sul piano.

3. *Caso delle superficie modanate.* — Se poi $\sin \psi_1 = 0$, il sistema di sezioni piane è un sistema di linee geodetiche, che sono linee di curvatura, perchè in tal caso per la (2') si ha $D' = 0$, ed inoltre sono tutte uguali, poichè in tal caso si annullano le quantità $\frac{1}{\rho_u}$, $\frac{1}{T_u}$, $\frac{\partial E}{\partial v}$ e quindi per la prima delle (7) la flessione di queste linee

$\frac{1}{R_u} = \frac{1}{\rho_1}$ è funzione solamente di u , precisamente come la E , cioè come l'arco di qualsivoglia di esse $\int \sqrt{E} \cdot du$, ciò che prova il teorema: *Se una superficie ammette un sistema di geodetiche piane queste sono su di essa linee di curvatura e sono tutte uguali.*

In questo caso siamo in presenza di una superficie modanata; di questo tipo di superficie ci occupiamo nel Capitolo III, per ora notiamo solo che il sistema (C_u) piano rappresentativo si riduce ad una sola curva, la geodetica generatrice, poichè $G_1 = G \sin^2 \psi_1 = 0$.

4. *Caso delle superficie rigate.* — Osserviamo che l'annullamento di $\frac{1}{\rho_u}$ può anche procedere da quello di $\frac{1}{\rho_1}$, come si scorge dalla seconda delle (1), senza che perciò si abbia $\psi_1 = 0$.

In questo caso la superficie è una rigata e la sua rappresentazione sul piano è costituita dalle tangenti ad una curva, che è la sviluppata di una linea piana v qualsivoglia.

Essendo, come si è detto, $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$ si può supporre senza ledere la generalità $E = 1$, ciò che equivale a fissare per parametro u la distanza che un punto generico della superficie ha da un punto da stabilirsi appartenente col primo alla stessa generatrice rettilinea.

Posto $E = 1$, ed inoltre $D = 0$, per la prima delle (1) nella prima formola di CODAZZI ed in quella di GAUSS (7), si ha:

$$\frac{\partial D'}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} D' = 0,$$

$$K = -\frac{D'^2}{G} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

La prima di queste si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial u} \log (D' \sqrt{G}) = 0$$

e quindi indicando con $f_1(v)$ una funzione della sola v :

$$D' \sqrt{G} = f_1(v),$$

oppure per la (2') e la (5):

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial u} = -\frac{D'}{\sqrt{G}} = -\frac{f_1(v)}{G} = -\frac{f_1(v) \sin^2 \psi_1}{G_1}.$$

D'altra parte riferendosi alla rappresentazione piana della superficie, essendo il piano a curvatura nulla, la formola di GAUSS ci dà $\frac{\partial^2 \sqrt{G_1}}{\partial u^2} = 0$, per cui, cambiando ove occorresse il parametro v in una sua funzione,

$$\sqrt{G_1} = u + f_2(v)$$

con $f_2(v)$ funzione solamente di v .

La precedente ci dà:

$$\frac{1}{\sin^2 \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} = -\frac{f_1(v)}{G_1} = -\frac{f_1(v)}{(u + f_2(v))^2}$$

cd integrando:

$$\cos \psi_1 = \frac{f_1(v)}{u + f_2(v)} + f_3(v)$$

con $f_3(v)$ funzione solamente di v .

Questa formola ci dice che il luogo delle normali ad una rigata non sviluppabile ($D' \neq 0$) lungo una sua generatrice rettilinea è un paraboloide iperbolico; questa è la cosiddetta legge di distribuzione dei piani tangenti ad una rigata scoperta da CHASLES.

5. *La rappresentazione studiata non conserva gli angoli.* — Ritornando al caso generale, rileviamo come conseguenza immediata della (5), che se θ è l'angolo che una linea sulla superficie fa con le linee u , e θ_1 quello che la linea definita dalla stessa equazione fra u e v fa con le linee u dell'immagine piana; si ha:

$$\tan \theta_1 = \sqrt{\frac{G_1}{E_1}} \frac{\partial v}{\partial u} = \sin \psi_1 \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial v}{\partial u} = \sin \psi_1 \tan \theta,$$

la quale prova che la trasformazione studiata non conserva gli angoli, a meno che non sia $\sin \psi_1 = 1$.

In questo caso il sistema di sezioni piane è costituito da assintotiche perchè, sempre in base alle formole fondamentali (1) si avrà: $\frac{1}{R_u} = \frac{D}{E} = 0$, che inoltre sono linee di curvatura $\left(\frac{1}{T} = -\frac{D'}{\sqrt{G}} = 0 \right)$, per cui si è manifestamente in presenza di una rigata sviluppabile, di cui le generatrici rettilinee sono le sezioni piane ottenute con i piani tangenti.

6. *Superficie che ammettono una data rappresentazione piana.* — Data inversamente una semplice infinità di curve sul piano, ci domandiamo: è sempre possibile costruire una superficie che ammetta le curve del sistema come sezioni piane?

Per una tale costruzione basta la conoscenza dell'angolo ψ_1 che la normale alla superficie deve fare in ogni punto con la normale principale alla corrispondente linea del sistema piano.

Questa funzione ψ_1 non può però prendersi ad arbitrio, poichè per l'esistenza della superficie occorre e basta che siano soddisfatte le due formole di CODAZZI e quella di GAUSS.

Queste tre formole, quando si parte dal sistema di curve prefissato sul piano, si riducono a due indipendenti.

Riferiamo infatti, come innanzi, il piano al doppio sistema ortogonale, costituito dalle curve del sistema dato e dalle loro traiettorie ortogonali, e riteniamo le segnature precedenti. Dimostriamo che la prima e l'ultima delle (7) sono l'una conseguenza dell'altra, e cioè che se per un'espressione analitica di ψ_1 è soddisfatta una, lo è anche l'altra.

Infatti, supponendo soddisfatta, ad esempio, la prima formola di CODAZZI e tenendo conto della (9), ove si ponga $\bar{K} = 0$, e $\cot \psi_1 = \frac{\rho_u}{R_u}$, si ottiene la formola di GAUSS.

Per trovare l'equazione differenziale cui deve soddisfare ψ_1 basterà eliminare $\frac{I}{R_v}$ tra la seconda di CODAZZI e l'invariante di GAUSS e sostituire alle quantità $\frac{I}{R_u}$, $\frac{I}{\rho_u}$, $\frac{I}{\rho_v}$, $\frac{I}{T_u}$ le quantità ricavate dalle (1) e (2) in funzione di E , $G_1 = G \sin^2 \psi_1$ e ψ_1 .

Così procedendo si arriva ad un'equazione differenziale alle derivate parziali del terzo ordine di cui troveremo per altra via l'integrale generale nel seguente capitolo.

CAPITOLO II.

Costruzione di superficie che ammettono come sezioni piane un prefissato sistema ∞^1 di curve piane.

7. *Posizione del problema.* — Siano:

$$(10) \quad X_1 = X_1(u, v), \quad Y_1 = Y_1(u, v)$$

le equazioni di un doppio sistema di curve; il sistema (C_u) corrispondente ai valori costanti del parametro v , ed il sistema (C_v) corrispondente ai valori costanti del parametro u .

Volendo studiare le superficie che ammettono le curve del sistema (C_u) come sezioni piane, ci è conveniente pensare che questo sia ortogonale al sistema (C_v) .

Andiamo a mostrare come è sempre possibile costruire infinite superficie in corrispondenza puntuale col piano del sistema prefissato (C_u) , tali che alle curve di questo sistema corrispondano sulla superficie curve uguali ed alle loro traiettorie ortogonali le traiettorie ortogonali delle corrispondenti.

Questa costruzione segue dalle considerazioni seguenti:

Se sopra una superficie si considera un sistema semplicemente infinito di curve piane, la semplice infinità di piani in cui queste giacciono involuppa una sviluppabile Σ che può ridursi eventualmente ad una retta.

Chiamiamo S lo spigolo di regresso di questa sviluppabile.

Per semplicità di trattazione ci conviene distinguere i seguenti casi:

(A) La S è una curva storta qualunque e quindi la Σ è la più generale superficie sviluppabile.

(B) La S è un punto al finito e quindi la Σ è un cono.

- (C) La S è un punto all'infinito e quindi la Σ è un cilindro.
 (D) La S è una retta al finito.
 (E) La S è una retta all'infinito.

CASO (A).

8. *Determinazione intrinseca della superficie.* — Si consideri nel piano del doppio sistema ortogonale (10) una curva *arbitraria* S_1 di cui il parametro v esprima la lunghezza dell'arco a partire da un'origine prefissata e siano:

$$x_1 = x_1(v), \quad y_1 = y_1(v)$$

le sue equazioni parametriche, sarà:

$$x_1'^2(v) + y_1'^2(v) = 1,$$

per cui le coordinate (ξ, ζ) di un punto (X_1, Y_1) del piano rispetto al sistema cartesiano individuato dalla tangente e dalla normale ad S_1 in un suo punto P , ci saranno date da:

$$(11)_A \quad \begin{cases} \xi = (X_1 - x_1)x_1' + (Y_1 - y_1)y_1', \\ \zeta = -(X_1 - x_1)y_1' + (Y_1 - y_1)x_1', \end{cases}$$

le quali, ove per X_1, Y_1 si pongano le (10) calcolate per quel valore di v che determina P , sono le equazioni parametriche della curva C_u , relativa allo stesso valore di v , riferita al sistema cartesiano predetto.

Torciamo la S_1 , lasciandone invariata la flessione, in modo che acquisti in ogni punto una torsione prefissata $\frac{1}{r}$, variabile in generale da punto a punto. Chiamiamo con S la curva così ottenuta e consideriamo nel piano osculatore di ogni suo punto la curva C_u , di cui le (11)_A sono le equazioni parametriche, riferita alla tangente ed alla normale principale di S .

L'insieme di tutte le C_u , così disposte, costituirà una superficie che ammette le C_u come sezioni piane.

Quando nel piano di S_1 si passa da un punto $M(u, v)$ di una curva C_u ad un punto $M'(u + du, v + dv)$ della C_u consecutiva l'elemento lineare MM' ci è dato, da:

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + G_1 dv^2.$$

Se P è il punto di S_1 corrispondente al valore di v , che determina insieme ad u M , e P' l'altro corrispondente al valore $v + dv$, che determina con $u + du$, M' , quando il piano di S_1 ruota intorno alla PP' di un'angolo uguale a $\frac{dv}{r}$ trasportando M' , questo punto descriverà un elemento di arco $M'M''$ uguale a $\frac{\zeta dv}{r}$, per cui l'elemento

della superficie ci sarà dato da:

$$(12) \quad ds^2 = ds_1^2 + \frac{\zeta^2 dv^2}{r^2} = E_1 du^2 + \left(G_1 + \frac{\zeta^2}{r^2} \right) dv^2.$$

Se i valori che determinano M' sono $(u, v + dv)$ sarà la retta $M'M$ la normale principale alla C_u passante per M e quindi posto $\frac{M'M''}{M'M} = \cot \psi_1$, ψ_1 rappresenterà, come dianzi, l'angolo che la normale alla superficie fa con la normale principale alla C_u .

Sostituendo nella relazione $\frac{M'M''}{M'M} = \cot \psi_1$, ad $M'M''$, $M'M$ le loro espressioni analitiche, avremo ⁴⁾:

$$(13) \quad \cot \psi_1 = \frac{\zeta}{r\sqrt{G_1}}$$

e quindi posto in (12)

$$(14) \quad E = E_1, \quad G = G_1 + \frac{\zeta^2}{r^2} = G_1(1 + \cot^2 \psi_1) = \frac{G_1}{\sin^2 \psi_1}$$

si avrà:

$$(15) \quad \begin{cases} ds^2 = E du^2 + G dv^2 = E_1 du^2 + \frac{G_1}{\sin^2 \psi_1} dv^2, \\ ds_1^2 = E_1 du^2 + G_1 dv^2 = E du^2 + G \sin^2 \psi_1 dv^2, \\ \cot \psi_1 = \frac{\zeta}{r\sqrt{G_1}}. \end{cases}$$

Di qua si deduce che le traiettorie ortogonali delle linee u sulla superficie sono le corrispondenti delle traiettorie ortogonali delle linee stesse considerate nel piano.

Notiamo che se il sistema (C_u) si riduce ad una sola curva si ha $G_1 = 0$, $G = \frac{\zeta^2}{r^2}$, sen $\psi_1 = 0$, per cui (n° 3) le formole precedenti sono quelle relative alle superficie modanate.

I coefficienti D e D' della seconda forma fondamentale della superficie ci sono dati dalla (3) e dalla (2') e cioè da:

$$(16) \quad \begin{cases} D = \frac{1}{2} \frac{\cos \psi_1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial E}{\partial v}, \\ D' = -\sqrt{G} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} = -\frac{\sqrt{G_1}}{\sin \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \end{cases}$$

e la D'' dalla formola di GAUSS o dalla prima di CODAZZI.

9. *Equazioni parametriche in termini finiti della superficie.* — Note così E , G , D , D' , D'' la determinazione in termini finiti della superficie si otterrà integrando un'equazione

⁴⁾ G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IV^e Partie (Paris, Gauthier-Villars, 1895), pag. 205, n° 999.

del tipo RICCATI ⁵⁾, ciò che del resto si può vedere più semplicemente in questo caso come segue.

Scelta la S_1 se ne calcoli la flessione $\frac{1}{\rho}$, che sarà anche quella di S , per cui data di questa curva la torsione $\frac{1}{r}$, la sua determinazione dipenderà dalla integrazione di un'equazione differenziale del tipo RICCATI ⁶⁾.

Siano

$$(17) \quad x = x(v), \quad y = y(v), \quad z = z(v)$$

le equazioni parametriche di S , in cui v esprime la lunghezza dell'arco, avendo determinate tutte le costanti d'integrazione in modo che, fissata la C_u secondo cui la superficie deve essere tagliata dal piano xy cioè dal piano della S_1 e quindi in corrispondenza un valore di v e un punto su S_1 , la S venga a passare per questo punto ed abbia in esso con S_1 un contatto di secondo ordine.

Per la stessa definizione di S sarà:

$$(18) \quad \left(\frac{d^2 x}{dv^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dv^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dv^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2 x_1}{dv^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y_1}{dv^2}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}.$$

Se (a, b, c) , (α, β, γ) , (λ, μ, ν) indicano i coseni direttori della tangente, della binormale e della normale principale di S , le equazioni parametriche in termini finiti della superficie saranno manifestamente:

$$(19) \quad \begin{cases} X = x + a\xi + \lambda\zeta, \\ Y = y + b\xi + \mu\zeta, \\ Z = z + c\xi + \nu\zeta \end{cases}$$

ove ξ, ζ hanno il significato espresso dalle $(11)_A$.

Le considerazioni, che abbiamo svolte, presuppongono data la S_1 non solo in posizione relativa rispetto al sistema (C_u) ma anche in modo che i suoi punti siano in corrispondenza biunivoca e continua con le curve del sistema. Noi ciò abbiamo espresso per semplicità di trattazione supponendo che il parametro v del sistema indichi anche l'arco di S_1 e quindi se si vuole trattare il problema in tutta la sua generalità, ritenuto che v indichi l'arco di S_1 , occorre sostituire nelle $(11)_A$ alla v che compare in X_1 e Y_1 una sua funzione.

Supponiamo infine che sia data la S con i punti in corrispondenza colle curve del sistema (C_u) e sia assegnata *anche in posizione* nel piano osculatore di S in un suo punto $v = v_1$ la C_u corrispondente, cioè la sezione che questo piano deve determinare sulla superficie. Per scrivere allora le (19) occorre la conoscenza di ξ e di ζ cioè $(11)_A$ di x_1 e di y_1 , al che si perviene con tre quadrature.

Indicando infatti con $d\varphi_1$ l'angolo di contingenza di S_1 si avrà manifestamente per

⁵⁾ BIANCHI, loc. cit. ¹⁾, vol. I, pag. 115.

⁶⁾ BIANCHI, loc. cit. ¹⁾, vol. I, pag. 17.

le (18):

$$\varphi_1 = \int \frac{dv}{\rho},$$

$$x_1 = \int \cos \varphi_1 dv, \quad y_1 = \int \sin \varphi_1 dv,$$

ove si determinano le costanti d'integrazione in modo che per $v = v_1$ le $(11)_A$ siano le equazioni parametriche della C_u corrispondente a questo valore di v , per ipotesi date.

Osserviamo che la (13) dipende da tre funzioni arbitrarie $x(v)$, $y(v)$, r . Essa ci dà l'integrale dell'equazione differenziale alle derivate parziali del terzo ordine, cui abbiamo accennato alla fine del n° 6.

CASO (B).

10. Si consideri nel piano del doppio sistema ortogonale (C_u) un punto, che, senza ledere la generalità, possiamo sempre supporre essere l'origine delle coordinate.

Ad ogni curva del sistema (C_u) facciamo corrispondere quel raggio uscente dall'origine che fa con l'asse delle X un'angolo il cui valore sia quello del parametro v che determina la curva in discorso.

Alle $(11)_A$ bisognerà sostituire le formole

$$(11)_B \quad \begin{cases} \xi = X_1 \cos v + Y_1 \sin v, \\ \zeta = -X_1 \sin v + Y_1 \cos v \end{cases}$$

ove adunque ξ e ζ indicano rispettivamente la distanza di un punto generico della C_u che si considera dal raggio ad essa corrispondente e dal raggio ortogonale passante per l'origine degli assi.

Se ora pensiamo che ogni C_u ruoti intorno al raggio corrispondente cosicchè il suo piano venga a formare col piano della C_u precedente un'angolo uguale a $\frac{dv}{r}$, ove r è una funzione solamente di v , l'insieme di tutte le C_u verrà a costituire una superficie, cui convengono le (13), (14), (15), (16) ove però per ζ s'intenda la funzione dataci dalla seconda delle $(11)_B$.

Le equazioni parametriche della superficie ci saranno date dalle (19) ove si pongano: 1°) per x , y , z le tre coordinate costanti del vertice del cono involuppo dei piani secanti la superficie, le quali per la scelta fatta degli assi nello scrivere le $(11)_B$ dobbiamo supporre nulle; 2°) per a , b , c , e λ , μ , ν , rispettivamente i coseni direttori della generatrice del cono e quelli della direzione normale a questa nel piano tangente al cono; 3°) per ξ , ζ , le funzioni definite dalle $(11)_B$.

La determinazione della superficie dipende adunque dalla conoscenza di a , b , c , la quale si può far dipendere dall'integrazione di un'equazione del tipo RICCATI.

Infatti interpretiamo a , b , c , come le coordinate di un punto dell'intersezione del

cono con la sfera di raggio unitario avente il centro nel vertice del cono. Di questa curva sferica allora si conosce la curvatura normale, costantemente uguale all'unità, e la curvatura geodetica uguale $\frac{1}{r}$ perchè questa si può ottenere dividendo l'angolo formato da due geodetiche tangenti alla linea in due punti infinitamente vicini, che è appunto $\frac{dv}{r}$, per l'arco infinitesimo che è dv . Allora la *flessione* uguale $\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}$.

Considerando allora che la curva è sferica sarà nota anche la *torsione* ⁷⁾, ciò che prova l'asserto.

Anche qui sono da ripetersi le considerazioni svolte precedentemente n° 9 a proposito della corrispondenza delle C_u con i punti di S_1 , e perciò le equazioni più generali della superficie in termini finiti ci sono date dalle formole che si ricavano dalle (19) nel modo anzidetto, e cioè da:

$$(19)_B \quad \begin{cases} X = (a \cos v - \lambda \sin v) X_1 + (a \sin v + \lambda \cos v) Y_1, \\ Y = (b \cos v - \mu \sin v) X_1 + (b \sin v + \mu \cos v) Y_1, \\ Z = (c \cos v - \nu \sin v) X_1 + (c \sin v + \nu \cos v) Y_1 \end{cases}$$

ove alla v che compare in X_1, Y_1 occorre sostituire la funzione di v , che fissa la corrispondenza tra le C_u e le rette del fascio con centro nell'origine delle coordinate.

CASO (C).

II. Si consideri nel piano di (C_u) un fascio di rette parallele, che senza ledere la generalità si possono pensare parallele all'asse delle Y .

Sia

$$X = v$$

l'equazione di questo fascio, allora ad ogni retta di esso corrisponderà quella C_u (10) che è determinata dallo stesso valore di v .

Si faccia ruotare ogni C_u intorno alla retta corrispondente, cosicchè il suo piano venga a formare col piano della C_u precedente un angolo uguale a $\frac{dv}{r}$, con r funzione della sola v .

La funzione $\frac{1}{r}$ in questo caso rappresenta la flessione della sezione normale del cilindro luogo degli assi immobili.

Riferiamo la superficie agli assi X, Y del piano di (C_u) ed alla normale a questo piano nell'origine. Posto

$$\varphi = \int_{v_0}^v \frac{dv}{r},$$

⁷⁾ CESÀRO, loc. cit. ²⁾, pag. 142.

ove v_0 rappresenta il valore di v che determina la C_u secondo cui si vuole che la superficie sia tagliata dal piano XY , φ rappresenterà l'angolo che la tangente alla sezione normale del cilindro fa con l'asse delle X . Le equazioni di questa curva ci sono date manifestamente da:

$$x(v) = \int_{v_0}^v \cos \varphi \, dv, \quad z(v) = \int_{v_0}^v \sin \varphi \, dv,$$

e le equazioni in termini finiti della superficie da

$$(19)_C \quad X = x(v) + (X_1 - v) \cos \varphi, \quad Y = Y_1, \quad Z = z(v) + (X_1 - v) \sin \varphi.$$

È chiaro che anche in questo caso sono valide le formole (13), (14), (15), (16) ove si ponga

$$(11)_C \quad \zeta = X_1 - v.$$

Per le stesse ragioni dette innanzi alla v , che compare in queste formole in X_1 e Y_1 , occorre sostituire quella sua funzione, che fissa la corrispondenza tra le rette del fascio $X = v$ e le curve del sistema C_u .

CASO (D).

12. Nel piano di (C_u) si consideri una retta, e sia l'asse delle Y .

Si faccia ruotare intorno ad essa ogni C_u di un angolo uguale al valore del parametro v che la determina.

Le equazioni parametriche della superficie che viene generata dalle C_u , riferita al sistema cartesiano adottato nel numero precedente ci sono date da:

$$(19)_D \quad X = X_1 \cos v, \quad Y = Y_1, \quad Z = X_1 \sin v.$$

Per la validità delle formole (13), (14), (15), (16) occorre in questo caso porre manifestamente:

$$(11)_D \quad \frac{\zeta}{r} = X_1.$$

Anche qui va fatta l'osservazione relativa alla v , che compare in X_1 , Y_1 .

CASO (E).

13. Facciamo subire ad ogni C_u una traslazione perpendicolare al piano di (C_u) misurata dal valore che acquista una funzione data ad arbitrio $z(v)$, calcolata per il valore di v , che determina la C_u che si considera.

Le equazioni della superficie che così vengono a costituire le C_u , rispetto al sistema adottato negli ultimi due numeri, sono manifestamente:

$$(19)_E \quad X = X_1(u, v), \quad Y = Y_1(u, v), \quad Z = Z(v),$$

per cui le formole (13), (14), (15), (16) sono valide in questo caso se in esse si pone

$$(11)_E \quad \frac{\zeta}{r} = \frac{d\zeta}{dv},$$

come si scorge calcolando la G dell'elemento lineare della superficie in base alla formola

$$G = G_1 + \frac{\zeta^2}{r^2}.$$

CAPITOLO III.

Superficie modanate.

14. Forma dell'elemento lineare delle modanate. — Già sappiamo dal Capitolo I, n° 3, che affinchè le C_u sulla superficie costituiscano un sistema di geodetiche occorre che esse siano tutte uguali e che siano incontrate dalle loro traiettorie ortogonali in punti omologhi.

Diciamo che in questo caso il sistema piano (C_u) , se non è costituito da rette, deve ridursi ad una curva sola.

Perchè allora la curvatura geodetica si annulla solamente quando $\sin \psi_1 = 0$ e considerato che per l'esistenza della superficie la G deve essere finita, dalla seconda delle (14) si deduce:

$$G_1 = 0, \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial Y_1}{\partial v} = 0,$$

le quali provano l'affermazione.

Cambiando ove occorresse il parametro u in quella funzione che ci dà l'arco delle C_u , l'elemento lineare più generale della superficie, per la seconda delle (14) e tenuto conto dell'espressione (11) di ζ nei vari casi, assumerà la forma:

$$(20) \quad ds^2 = du^2 + [f_1(v)X_1(u) + f_2(v)Y_1(u) + f_3(v)]^2 dv^2$$

ove, dato il significato di u , le funzioni $X_1(u)$, $Y_1(u)$ soddisfano alle relazioni:

$$(21) \quad \left(\frac{dX_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dY_1}{du}\right)^2 = 1.$$

Viceversa vedremo che ogni superficie il cui elemento lineare è riducibile alla forma (20) con $X_1(u)$, $Y_1(u)$ legate dalla (21) è applicabile ad una superficie modanata, di cui le linee u costituiscono un sistema semplicemente infinito di curve uguali.

Per la determinazione intrinseca delle modanate di cui si conosce l'elemento lineare distingueremo due casi:

CASO (a). — Il rapporto delle funzioni $f_1(v)$, $f_2(v)$ dipende effettivamente da v .

CASO (b). — Il rapporto delle funzioni $f_1(v)$, $f_2(v)$ è una costante.

Escludiamo il caso che queste funzioni siano entrambe nulle, perchè allora si tratta di una Sviluppabile che può sempre deformarsi in una modanata.

CASO (a).

15. *Modanate non deformabili in altre modanate con deformazione della curva generatrice.* — Nel primo caso si ha:

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = f_1(v) X'_1(u) + f_2(v) Y'_1(u),$$

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = f_1(v) X''_1(u) + f_2(v) Y''_1(u),$$

dalle quali, posto:

$$(22) \quad \frac{1}{\rho_1} = X'_1 Y''_1 - X''_1 Y'_1 = \sqrt{X''_1{}^2(u) + Y''_1{}^2(u)},$$

si deduce successivamente:

$$\frac{f_1(v)}{\rho_1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} & Y'_1(u) \\ \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} & Y''_1(u) \end{vmatrix}, \quad \frac{f_2(v)}{\rho_2} = \begin{vmatrix} X'_1(u) & \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \\ X''_1(u) & \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \end{vmatrix},$$

$$\frac{f_1^2(v) + f_2^2(v)}{\rho_1^2} = \left(\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \right)^2 + \frac{1}{\rho_1^2} \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right)^2,$$

e quindi:

$$(22') \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 - \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right)^2}}.$$

Sostituendo in questa per $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$ e $\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$ le loro espressioni e tenuto conto che $X''_1{}^2(u) + Y''_1{}^2(u) = 1$, si deduce:

$$(22'') \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{f_1(v) X''_1(u) + f_2(v) Y''_1(u)}{f_1(v) Y'_1(u) - f_2(v) X'_1(u)}.$$

Questa formola ci dice che la (20) insieme alla (21) ci può dare l'elemento lineare di una modanata qualora, calcolando il secondo membro della precedente, si abbia una funzione della sola u .

Se allora poniamo:

$$(23) \quad D = \frac{1}{\rho_1}, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{\sqrt{G}}{D} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = -\sqrt{G} \sqrt{f_1^2(v) + f_2^2(v) - \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)^2}$$

la superficie modanata sarà perfettamente determinata e la curva generatrice sarà quella di cui le equazioni parametriche sono:

$$X = X_1(u), \quad Y = Y_1(u),$$

perchè le espressioni di D , D' , D'' assunte soddisfano alle due formole di CODAZZI ed a quella di GAUSS (7).

Per questa verifica consideriamo che l'espressione di D'' è ricavata da ciò che diviene la formola di GAUSS nel nostro caso; che la prima di CODAZZI è identicamente verificata per essere la $D = \frac{1}{\rho_1}$ funzione della sola u ; e la seconda di CODAZZI, che si riduce a:

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u} D'' - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} D = 0,$$

si verifica immediatamente dopo averla scritta sotto la forma:

$$\frac{\partial D''}{\partial u \sqrt{G}} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} D.$$

Infatti moltiplicando ambo i membri di questa per:

$$\frac{D''}{\sqrt{G}} = -\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \frac{1}{D},$$

si ha:

$$(24) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{D''}{\sqrt{G}} \right) = -\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right)^2,$$

la quale è manifestamente verificata se in essa si pone:

$$\frac{D''}{\sqrt{G}} = -\sqrt{f_1^2(v) + f_2^2(v) - \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)^2}.$$

Che poi le linee u siano piane, risulta dal fatto per essere $D' = 0$ è $\frac{1}{T_u} = 0$ e la loro torsione $\frac{1}{r_1}$ ci è data dall'equazione:

$$\frac{1}{T_u} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} - \frac{1}{r_1} = 0.$$

Dunque è $\frac{1}{r_1} = 0$, poichè, essendo $E = 1$, le linee u sono geodetiche e quindi $\psi_1 = 0$.

Dall'essere $\psi_1 = 0$ ed $E = 1$ si deduce infine che di queste linee u la curvatura normale $\frac{1}{R_u} = D$ è uguale alla loro flessione $\frac{1}{\rho_1}$ e poichè questa è una funzione so-

lamente dell'arco u , si conclude che queste linee sono tutte uguali e che hanno per equazione intrinseca la (22') cioè la (22) e per equazioni parametriche cartesiane $X = X_1(u)$, $Y = Y_1(u)$.

La linea (22) è la sola che possa muovendosi restare sempre ortogonale alle traiettorie dei suoi punti e generare una superficie il cui elemento lineare sia dato dalla (20) insieme alla (21).

Infatti la seconda delle (1) Capitolo I ci dà $\psi_1 = 0$, e quindi per la prima e la terza delle stesse, tenuto conto che:

$$\frac{1}{T_u} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} - \frac{1}{r_1},$$

si ha:

$$\frac{1}{R_u} = D, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{D'}{\sqrt{G}},$$

dove R_u ed r_1 indicano rispettivamente il raggio di flessione e quello di torsione della curva cercata.

Poichè R_u ed r_1 debbono essere funzioni della sola u , altrettanto si può dire di D e di $\frac{D'}{\sqrt{G}}$, per cui la prima di CODAZZI (7) ci dà:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sqrt{G}}{r_1} \right) + \frac{1}{2 r_1 \sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

cioè:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{1}{r_1} \right) + \frac{1}{r_1 G} \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

Da questa, integrando, si deduce che la funzione G deve essere il prodotto di una funzione della sola v per una funzione della sola u , a meno che non si ponga $\frac{1}{r_1} = 0$, nel quel caso la precedente nulla ci dice sulla natura di G .

La prima di queste ipotesi ⁸⁾ è da scartarsi.

Infatti, ammessa questa ipotesi, per la (20) si può porre:

$$\sqrt{G} = f_1(v) X_1(u) + f_2(v) Y_1(u) + f_3(v) = UV,$$

ove U e V indicano due funzioni una della sola u e l'altra della sola v .

Dividendo per V e derivando rispetto ad u , da questa si deduce:

$$\frac{f_1(v)}{V} \frac{dX_1}{du} + \frac{f_2(v)}{V} \frac{dY_1}{du} = \frac{dU}{du},$$

⁸⁾ Vedi in proposito la nostra nota: *Analisi intrinseca delle elicoidi, con particolare riguardo a quelle ad area minima ed alle pseudosferiche* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXXII (2° semestre 1911), pp. 143-157].

e poi ancora dividendo per $\frac{dU}{du}$ e derivando rispetto ad u :

$$\frac{f_1(v)}{V} \frac{d}{du} \left(\frac{\frac{dX_1}{du}}{\frac{dU}{du}} \right) + \frac{f_2(v)}{V} \frac{d}{du} \left(\frac{\frac{dY_1}{du}}{\frac{dU}{du}} \right) = 0.$$

Se le due derivate:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\frac{dX_1}{du}}{\frac{dU}{du}} \right), \quad \frac{d}{du} \left(\frac{\frac{dY_1}{du}}{\frac{dU}{du}} \right)$$

sono nulle, X_1 ed Y_1 sono legate da una relazione lineare, ed allora la linea generatrice è una retta, precisamente come la (22).

Se poi queste due derivate non sono entrambe nulle, dalla precedente uguaglianza deduciamo che il rapporto di $f_1(v)$ ad $f_2(v)$ non dipende da v , ciò che è escluso per ipotesi.

Adunque bisogna porre $\frac{1}{r_1} = 0$, cioè ammettere che la curva generatrice sia piana.

In tal caso, risultando anche $D' = 0$, dalla seconda di CODAZZI e dall'invariante di GAUSS si ottiene come prima la (24), di cui l'integrale generale è:

$$\frac{D''}{\sqrt{G}} = \sqrt{F^2(v) - \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right)^2}$$

con $F^2(v)$ funzione della sola v .

D'altra parte la prima delle (1) e l'invariante di GAUSS ci danno:

$$\frac{1}{R_{11}} = D = - \frac{\sqrt{G}}{D''} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2},$$

e quindi per la precedente:

$$\frac{1}{R_{11}} = \frac{- \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}}{\sqrt{F^2(v) - \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right)^2}}.$$

Nel caso che sia $\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = 0$, la curva generatrice è rettilinea come la (22') e quindi il teorema resta dimostrato.

Se poi $\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \neq 0$, per determinare $F^2(v)$ osserviamo che dalla precedente e dalla (22') si deduce:

$$R_{11}^2 = \rho_1^2 + \frac{F^2(v) - f_1^2(v) - f_2^2(v)}{(f_1(v) X_1''(u) + f_2(v) Y_1''(u))^2},$$

e quindi, giacchè R_u e ρ_1 sono funzioni della sola u , occorre e basta che

$$\frac{F^2(v) - f_1^2(v) - f_2^2(v)}{(f_1(v) X_1''(u) + f_2(v) Y_1''(u))^2}$$

sia funzione solamente di u .

Andiamo a dimostrare che a questa condizione si soddisfa solamente ponendo:

$$F^2(v) = f_1^2(v) + f_2^2(v),$$

a meno che non sia costante il rapporto di $f_1(v)$ ad $f_2(v)$, nel qual caso si potrebbe prendere per $F(v)$ una funzione in rapporto costante con $f_1(v)$.

Se infatti si potesse soddisfare altrimenti alla predetta condizione, indicando con U una funzione non identicamente nulla della sola u , si dovrebbe avere:

$$f_1(v)(U X_1''(u)) + f_2(v)(U Y_1''(u)) = \sqrt{F^2(v) - f_1^2(v) - f_2^2(v)}$$

e quindi derivando rispetto ad u :

$$f_1(v) \frac{d}{du} (U X_1''(u)) + f_2(v) \frac{d}{du} (U Y_1''(u)) = 0.$$

Ora se le due derivate:

$$\frac{d}{du} (U X_1''(u)), \quad \frac{d}{du} (U Y_1''(u))$$

sono identicamente nulle, allora $X_1''(u)$ ed $Y_1''(u)$ hanno un rapporto costante, e quindi $X_1'(u)$ e $Y_1'(u)$ sono legate da una relazione lineare.

Considerando allora che si ha:

$$X_1'^2(u) + Y_1'^2(u) = 1$$

si conclude che $X'(u)$ ed $Y'(u)$ sono costanti cioè che la curva generatrice è una retta.

Se poi le due derivate:

$$\frac{d}{du} (U X_1''(u)), \quad \frac{d}{du} (U Y_1''(u))$$

non sono entrambi nulle, allora dalla precedente uguaglianza si deduce che il rapporto di $f_1(v)$ ad $f_2(v)$, che non può dipendere da u , non dipende da v , e quindi è costante, ciò che è escluso per ipotesi.

La proposizione è adunque dimostrata.

Dai ragionamenti fatti in questo numero segue che:

Le sole curve piane possono muoversi in modo da rimanere ortogonali alle traiettorie dei loro punti e che esse siano inoltre linee di curvatura sulle superficie generate.

Ci occuperemo in appresso (n° 18 e 19), per le modanate studiate in questo numero, della determinazione della sviluppabile direttrice Σ .

È degno di nota il fatto che, dato l'elemento lineare di una superficie, si può concludere che essa è applicabile ad una modanata qualora si possa trovare una trasformazione di parametri per cui detto elemento possa assumere la forma:

$$ds^2 = du^2 + G dv^2,$$

con G funzione tale di u e di v , che si possa determinare una funzione $F^2(v)$ della sola v , per cui l'espressione:

$$\frac{\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}}{1/F^2(v) - \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)^2}$$

sia funzione della sola u .

Chiudiamo questo numero osservando che se invece di partire dalla (20) si partisse dall'altra:

$$ds^2 = du^2 + [f_1(v)X_1(u) + f_2(v)Y_1(u) + f_3(v)]^2 \Phi^2(v) dv^2.$$

che ne differisce per la presenza del fattore $\Phi^2(v)$ nel coefficiente di dv^2 , la modanata relativa, quantunque generata dalla stessa curva, è diversa da quella di cui la (20) e le (23) sono le equazioni intrinseche.

Quello che è veramente notevole è che, *queste due superficie hanno, nei punti determinati dagli stessi valori dei parametri u e v , la stessa curvatura totale K e non sono applicabili l'una sull'altra.*

Infatti la terza delle (7) si riduce, per $E = 1$, alla seguente:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2},$$

dalla quale si scorge appunto che K non muta quando si moltiplica G per una funzione di v .

Una conferma al fatto che le due superficie non sono applicabili ⁹⁾, si ha calcolando il parametro differenziale primo ¹⁰⁾ $\Delta_1 K$ della curvatura per le due forme di elemento lineare considerate.

⁹⁾ BIANCHI, loc. cit. ¹⁾, vol. I, pag. 218.

¹⁰⁾ Se la forma dell'elemento lineare di una superficie ci è data da:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$

il parametro differenziale primo di una funzione φ , ci è dato dalla formula:

$$\Delta_1 \varphi = \frac{E \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2};$$

BIANCHI, loc. cit., pag. 93.

Questi parametri sono:

$$\frac{\left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2}{[f_1(v)X_1(u) + f_2(v)Y_1(u) + f_3(v)]^2} + \left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2,$$

$$\frac{\left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2}{[f_1(v)X_1(u) + f_2(v)Y_1(u) + f_3(v)]^2 \Phi^2(v)} + \left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2;$$

e da questi si scorge che per l'applicabilità è anche necessario che sia $\frac{\partial K}{\partial v} = 0$, cioè che K sia funzione solamente di u .

In questa ipotesi, indicando con U una funzione della sola u , si ha

$$-K = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = U$$

da cui, sostituendo a G una delle sue espressioni che figurano nell'elemento lineare, si avrà in ogni caso:

$$f_1(v)[X_1''(u) - X_1(u)U] + f_2(v)[Y_1''(u) - Y_1(u)U] - f_3(v)U = 0.$$

Con un ragionamento già fatto da questa si ricava che, o il rapporto di $f_1(v)$ ad $f_2(v)$ è costante ed allora siamo nel caso (b), oppure che si ha:

$$(25) \quad \frac{X_1''(u)}{U} - X_1(u) = -a, \quad \frac{Y_1''(u)}{U} - Y_1(u) = -b,$$

essendo a, b costanti.

In virtù di queste la precedente diventa:

$$U(af_1(v) + bf_2(v) + f_3(v)) = 0$$

quindi se non è $U=0$, nel qual caso siamo in presenza delle rigate sviluppabili, dovrà essere $af_1(v) + bf_2(v) + f_3(v) = 0$.

Allora, tenuto conto che $X_1'X_1'' + Y_1'Y_1'' = 0$, moltiplicando le (25) rispettivamente per $X_1'(u)$ ed $Y_1'(u)$ e sommando, si ricava:

$$X_1'(u)[X_1(u) - a] + Y_1'(u)[Y_1(u) - b] = 0.$$

Da questa, integrando, si ha:

$$[X_1(u) - a]^2 + [Y_1(u) - b]^2 = c^2, \quad c = \text{cost.}$$

Se invece deriviamo, per le formole (25) si ha:

$$U[(X_1 - a)^2 + (Y_1 - b)^2] + 1 = 0,$$

e perciò, per la precedente, risulta:

$$U = -\frac{1}{c^2}.$$

Si conclude allora subito che la curva generatrice è una circonferenza di raggio c e la superficie corrispondente alle due forme dell'elemento lineare, una sfera dello stesso raggio.

Pur tuttavia non è qui il caso di parlare di applicabilità nel senso che le linee u si dispongono sulle linee v , poichè se $f_1(v)$ non è in rapporto costante con $f_2(v)$, non è possibile identificare, come in generale, i due elementi lineari.

CASO (b).

16. Modanate deformabili in altre con deformazione della curva generatrice. — Tornando alle considerazioni precedenti osserviamo che essendo:

$$\sqrt{G} = \sqrt{f_1^2(v) + f_2^2(v)} \left(\frac{f_1(v)}{\sqrt{f_1^2(v) + f_2^2(v)}} X_1(u) + \frac{f_2(v)}{\sqrt{f_1^2(v) + f_2^2(v)}} Y_1(u) \right) + f_3(v),$$

quando è costante il rapporto di $f_1(v)$ a $f_2(v)$, sono anche costanti $\frac{f_1(v)}{\sqrt{f_1^2(v) + f_2^2(v)}}$ ed $\frac{f_2(v)}{\sqrt{f_1^2(v) + f_2^2(v)}}$. Allora con una rotazione degli assi, cui è riferita la curva generatrice, possiamo far sì che G dipenda da una sola delle sue nuove coordinate $X_1(u)$, $Y_1(u)$.

Supposto $f_3(v) = 0$, nella (20) compare solo la funzione $X_1(u)$ e quindi le equazioni parametriche della curva mobile ci sono date da

$$(26) \quad X = X_1(u), \quad Y = Y_1(u) = \int \sqrt{1 - X_1'^2(u)} du,$$

e per la (22'),

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{X_1''(u)}{\sqrt{1 - X_1'^2(u)}}.$$

Per procedere più speditamente osserviamo che, con un'opportuno cambiamento del parametro v in una sua funzione, alla (20), in questo caso, si può dare la forma:

$$(27) \quad ds^2 = du^2 + [X_1(u) + f(v)]^2 dv^2.$$

Ora se esiste una superficie modanata applicabile a quella generata dalla curva piana (26), in modo che si corrispondano le generatrici, il suo elemento lineare, fissando opportunamente l'origine degli archi sulla nuova generatrice, deve potersi ridurre in primo luogo alla forma precedente, cioè a:

$$(28) \quad ds^2 = du^2 + [X(u) + F(v)]^2 dv^2,$$

ed inoltre v_1 deve essere una tale funzione di v da soddisfare alla relazione:

$$X_1(u) + f(v) = [X(u) + F(v)] \frac{dv_1}{dv}.$$

Derivando questa rispetto ad u , otteniamo:

$$X'_1(u) = X'(u) \frac{dv_1}{dv}.$$

Da questa e dalla precedente, considerando che $X'_1(u)$ ed $X'(u)$ sono funzioni della sola u ed indicando con k ed b delle costanti, si ricava:

$$(29) \quad v_1 = \frac{1}{k} v, \quad X(u) = k X_1(u) + b, \quad F(v_1) = k f(v) - b$$

fissando v_1 in modo che si annulli insieme a v .

Adunque la curva generatrice della nuova modanata avrà per equazioni parametriche:

$$X = k X_1(u) + b, \quad Y = \int \sqrt{1 - k^2 X_1'^2(u)} du,$$

e per equazione intrinseca:

$$(30) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{k X_1''(u)}{\sqrt{1 - k^2 X_1'^2(u)}}.$$

Esaminando i vari casi studiati al Capitolo II, nell'ipotesi $G_1 = 0$, si vede che le formole precedenti convengono al caso (C), n° 11, cioè alle modanate che ammettono per sviluppabile direttrice Σ un cilindro, oppure quando è $f(v) = 0$ al caso (D), cioè alle superficie di rotazione ¹¹⁾.

Indicando adunque con w ed $\frac{1}{r}$ l'arco e la curvatura della sezione retta del cilindro direttore Σ di una modanata generata dalla curva (26) la $(11)_C$ ci dà $\zeta = X_1(u) - w$.

Assumiamo su questa modanata come parametro u l'arco della (26), per cui essendo allora:

$$E = 1, \quad G = \frac{\zeta^2}{r^2} = \frac{(X_1(u) - w)^2}{r^2},$$

l'elemento lineare di questa modanata ci sarà dato dalla prima delle (15), cioè da:

$$ds^2 = du^2 + \frac{(X_1(u) - w)^2}{r^2} dw^2.$$

Identificando questa con la (28) si avrà:

$$(31) \quad \frac{dw}{r} = dv, \quad w = -f(v), \quad r = -\frac{df(v)}{dv}.$$

Dalla eliminazione di v tra queste due ultime si avrà l'equazione intrinseca della sezione retta del cilindro direttore Σ della modanata corrispondente alla forma (27).

¹¹⁾ BIANCHI, loc. cit. ¹⁾, vol. II, pag. 267; CESÀRO, loc. cit. ²⁾, pag. 178; DARBOUX, loc. cit. ⁴⁾, I^{re} Partie, pag. 105.

La prima delle precedenti ci dà il significato del parametro v , esso rappresenta l'angolo che la tangente alla suddetta sezione fa con una retta fissa del suo piano.

Analogamente indicando con w_1 ed $\frac{1}{r_1}$ l'arco e la curvatura della sezione retta del cilindro direttore Σ_1 della modanata corrispondente alla forma (28), si avrà:

$$\frac{dw_1}{r_1} = dv_1, \quad w_1 = -F(v_1), \quad r_1 = -\frac{dF(v_1)}{dv_1}.$$

Da queste formole e dalle precedenti tenuto conto delle (29) si deduce:

$$w_1 = kw + h, \quad r_1 = k^2 r.$$

Se adunque:

$$r = \chi(w)$$

è l'equazione intrinseca della sezione retta del cilindro Σ , quella della sezione retta del cilindro Σ_1 , sarà:

$$\frac{r_1}{k^2} = \chi\left(\frac{w_1 - h}{k}\right).$$

17. Modanate deformabili in altre con conservazione del cilindro direttore. — Queste formole suggeriscono lo studio di quelle modanate applicabili l'una all'altra nel senso predetto, che ammettono lo stesso cilindro direttore.

Fissata $k \neq 1$, dalla considerazione delle due precedenti risulta che la soluzione di questo problema equivale alla ricerca di quelle funzioni χ che soddisfano all'equazione funzionale:

$$\chi(w) = k^2 \chi\left(\frac{w}{k}\right),$$

avendo posto $h = 0$, ciò che equivale a fissare per origini sulla curva e sulla trasformata due punti in cui le flessioni sono uguali.

A questa equazione funzionale si soddisfa prendendo per $\chi(w)$ il prodotto di w^2 per una funzione periodica dell'argomento $\log w$ e di periodo uguale a $\log k$.

Ponendo infatti:

$$\chi(w) = w^2 \psi(w),$$

la precedente diventa:

$$\psi(w) = \psi\left(\frac{w}{k}\right),$$

cioè

$$\psi(e^{\log w}) = \psi(e^{\log w - \log k}),$$

la quale prova l'affermazione.

Notevole è il caso in cui si prende per funzione periodica una costante, poichè allora a qualunque deformazione della modanata corrisponde sempre lo stesso cilindro direttore.

È facile in tal caso scrivere in virtù delle posizioni precedenti l'equazione intrinseca della sezione retta di questo cilindro; essa è:

$$(32) \quad r = aw^2.$$

Le superficie corrispondenti alla soluzione $a = 0$ sono manifestamente quelle di rotazione, cui si riducono le modanate in discorso nel caso limite in cui il cilindro degenera in una retta.

Chiamato φ l'angolo che la tangente in un punto generico della curva (32) fa con una retta fissa del suo piano, si ha:

$$\varphi = b - \frac{1}{aw} \quad (b = \text{cost.}).$$

Da questa espressione di φ si scorge che la curva ha un polo nell'origine degli archi e che quando un punto percorre la curva allontanandosi dall'origine, sia in senso positivo che negativo, la tangente in esso alla curva tende a disporsi in modo da fare un angolo uguale a b con la retta fissa.

Assumiamo per origine delle coordinate il polo e per direzione dell'asse delle x quella relativa al valore di b . Sarà: $\varphi = -\frac{1}{aw}$ e quindi:

$$x = \int_0^w \cos \frac{1}{aw} dw = -\frac{1}{a} \int_{\varphi}^{\infty} \frac{\cos \varphi}{\varphi^2} d\varphi,$$

$$y = -\int_0^w \sin \frac{1}{aw} dw = \frac{1}{a} \int_{\varphi}^{\infty} \frac{\sin \varphi}{\varphi^2} d\varphi$$

dalle quali, integrando per parti, si ha:

$$x = \left[+\frac{\cos \varphi}{a\varphi} \right]_{\varphi}^{\infty} + \frac{1}{a} \int_{\varphi}^{\infty} \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi = \frac{\cos \varphi}{a\varphi} + \frac{1}{a} \int_{\varphi}^{\infty} \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi,$$

$$y = \left[-\frac{\sin \varphi}{a\varphi} \right]_{\varphi}^{\infty} + \frac{1}{a} \int_{\varphi}^{\infty} \frac{\cos \varphi}{\varphi} d\varphi = \frac{\sin \varphi}{a\varphi} + \frac{1}{a} \int_{\varphi}^{\infty} \frac{\cos \varphi}{\varphi} d\varphi.$$

Queste formole ci dicono che x è funzione dispari di φ mentre y è funzione pari, cioè che la curva esce dal polo con due rami simmetrici rispetto all'asse delle y e che questi due rami sono assintotici alla retta all'infinito, come si scorge considerando che per $\varphi = \frac{1}{aw} = 0$ diventano infiniti i valori di x e di y .

18. Determinazione del luogo degli assi immobili data la curva generatrice e la curvatura totale della superficie lungo le traiettorie di due punti. — Ritornando allo studio generale delle modanate riferiamoci al caso in cui $f_1(v)$ ed $f_2(v)$ non hanno rapporto costante. In ogni caso si ha:

$$(33) \quad d^2 s^2 = du^2 + [f_1(v)X_1(u) + f_2(v)Y_1(u) + f_3(v)]^2 dv^2,$$

per cui le (23) e (22') ci danno:

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R_u} = D = \frac{1}{\rho_1}, \quad \frac{1}{R_v} = \frac{D''}{G} &= -\frac{\rho_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial a^2} = -\rho_1 \frac{f_1 \frac{d^2 X_1}{du^2} + f_2 \frac{d^2 Y_1}{du^2}}{f_1 X_1 + f_2 Y_1 + f_3} \\ &= -\frac{f_1 \lambda + f_2 \mu}{f_1 X_1 + f_2 Y_1 + f_3}, \end{aligned} \right.$$

ove λ , μ indicano i coseni direttori della normale alla curva generatrice rispetto agli assi cartesiani cui essa è riferita.

Consideriamo l'equazione:

$$(35) \quad f_1(v)X + f_2(v)Y + f_3(v) = 0;$$

essa per ogni valore di v rappresenta una retta del piano della curva generatrice, e quindi nell'espressione precedente di $\frac{1}{R_v}$ il denominatore ci dà, a meno del fattore normalizzante, la distanza del punto $X_1(u)$, $Y_1(u)$ da questa retta, mentre il numeratore, a meno dello stesso fattore, ci dà il coseno dell'angolo ψ_2 che la normale alla curva generatrice in questo punto fa con la normale alla retta stessa.

Dunque il segmento di normale compreso tra il punto della curva e la retta in discorso è precisamente R_v , e quindi la retta (35) è l'asse istantaneo di rotazione. Il raggio di flessione ρ_2 della traiettoria del punto $(X_1(u), Y_1(u))$ e l'angolo ψ_2 ci sono dati per ogni valore di v dalle formole:

$$(36) \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}{f_1 X_1 + f_2 Y_1 + f_3}, \quad \cos \psi_2 = \frac{f_1 \lambda + f_2 \mu}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}, \quad \sin \psi_2 = \frac{f_1 \frac{dX_1}{du} + f_2 \frac{dY_1}{du}}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}.$$

Questa espressione di $\sin \psi_2$ si verifica immediatamente ricordando che λ e μ sono i coseni direttori della normale alla curva generatrice, mentre $\frac{dX_1}{du}$, $\frac{dY_1}{du}$ sono i coseni direttori della tangente.

Si osservi che ψ_2 rappresenta anche l'angolo che la normale alla superficie fa con la normale principale alla traiettoria nel punto (X_1, Y_1) .

Ciò posto distinguiamo due casi secondo che $f_3(v)$ è una combinazione lineare a coefficiente costanti di $f_1(v)$ e di $f_2(v)$ oppure no.

Nel primo caso, essendo

$$af_1(v) + bf_2(v) + f_3(v) = 0$$

con a e b costanti, si ha identicamente:

$$f_1(v)X + f_2(v)Y + f_3(v) = f_1(v)(X - a) + f_2(v)(Y - b),$$

per cui si conclude che le rette rappresentate dalla (35), cioè il luogo degli assi istantanei immobili, formano un fascio di centro (a, b) , e quindi il luogo degli assi istantanei mobili è un cono.

Se $f_3(v)$ non è una combinazione lineare a coefficienti costanti di $f_1(v)$ e di $f_2(v)$, e non è costante il rapporto di queste due funzioni, la (35) al variare di v inviluppa nel piano della curva generatrice una curva che non degenera in un punto, la quale è manifestamente quella che nel Capitolo II abbiamo chiamato S_1 .

Indichiamo ora con $R_v^{(1)}$, $R_v^{(2)}$ i due raggi di curvatura normale delle traiettorie descritte dai punti della curva generatrice corrispondenti ai valori u_1 , u_2 dell'arco u , e con (λ_1, μ_1) e (λ_2, μ_2) rispettivamente i coseni direttori delle normali in questi punti

alla curva generatrice. Dalla seconda delle (34) deduciamo:

$$(38) \quad \begin{cases} (\lambda_1 R_v^{(1)} + X_1(u_1))f_1(v) + (\mu_1 R_v^{(1)} + Y_1(u_1))f_2(v) + f_3(v) = 0, \\ (\lambda_2 R_v^{(2)} + X_1(u_2))f_1(v) + (\mu_2 R_v^{(2)} + Y_1(u_2))f_2(v) + f_3(v) = 0, \end{cases}$$

dalle quali si possono dedurre i rapporti $\frac{f_1(v)}{f_3(v)}$, $\frac{f_2(v)}{f_3(v)}$ in funzione di $R_v^{(1)}$ e di $R_v^{(2)}$ a meno che non sia:

$$(39) \quad \frac{\lambda_1 R_v^{(1)} + X_1(u_1)}{\lambda_2 R_v^{(2)} + X_1(u_2)} = \frac{\mu_1 R_v^{(1)} + Y_1(u_1)}{\mu_2 R_v^{(2)} + Y_1(u_2)}.$$

Se il valore comune di questi rapporti è diverso dall'unità si soddisferà alle (38) ponendo $f_3(v) = 0$, e quindi il luogo degli assi istantanei mobili sarà un fascio di rette o una retta sola secondo che il rapporto di $f_1(v)$ e di $f_2(v)$, ricavato da una delle (38), risulta o no funzione di v . La modanata corrispondente sarà allora a sviluppabile direttrice conica o si ridurrà ad una superficie di rotazione.

Se il valore comune ai rapporti (39) risulta uguale all'unità le (38) si riducono ad una sola. In questo caso dalla (39) deduciamo:

$$(39') \quad \begin{cases} \lambda_1 R_v^{(1)} - \lambda_2 R_v^{(2)} + (X_1(u_1) - X_1(u_2)) = 0, \\ \mu_1 R_v^{(1)} - \mu_2 R_v^{(2)} + (Y_1(u_1) - Y_1(u_2)) = 0, \end{cases}$$

le quali si dicono che se $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \neq 0$ le quantità $R_v^{(1)}$ e $R_v^{(2)}$ sono due costanti.

In questa ipotesi le (38) ci dicono che $f_3(v)$ è una combinazione lineare a coefficienti costanti di $f_1(v)$ e di $f_2(v)$ e quindi che il luogo degli assi istantanei mobili è un fascio di rette, il cui centro è il punto $(X_1(u_1) + \lambda_1 R_v^{(1)}, Y_1(u_1) + \mu_1 R_v^{(1)})$ coincidente con l'altro $(X_1(u_2) + \lambda_2 R_v^{(2)}, Y_1(u_2) + \mu_2 R_v^{(2)})$.

Se poi $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 0$, si deve avere anche:

$$\lambda_1 (Y_1(u_1) - Y_1(u_2)) - \mu_1 (X_1(u_1) - X_1(u_2)) = 0,$$

$$\lambda_2 (Y_1(u_1) - Y_1(u_2)) - \mu_2 (X_1(u_1) - X_1(u_2)) = 0,$$

altrimenti le (39') sarebbero incompatibili ed il valore comuni ai rapporti (38) non sarebbe l'unità.

Queste ultime insieme all'altra $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 0$, ci dicono che le due normali nei punti $u = u_1$, $u = u_2$ coincidono, ed inoltre che le funzioni $R_v^{(1)}$ e $R_v^{(2)}$ non bastano per la determinazione del luogo degli assi istantanei.

Osserviamo ora che la curvatura totale della superficie lungo la traiettoria di un punto della curva generatrice è uguale al prodotto della flessione di questa nello stesso punto per la curvatura normale $\frac{1}{R_v}$ della traiettoria. Da ciò e dalla considerazione delle (38) segue che: *Data la curva generatrice e la curvatura totale della superficie lungo le traiettorie di due punti resta definito il luogo degli assi istantanei immobili, a meno che le normali alla curva generatrice in questi punti non coincidano.*

19. Determinazione della sviluppabile direttrice Σ . — Nel caso che la sviluppabile di-

rettrice non è nè un cilindro nè un cono il quadrato dell'elemento lineare è:

$$ds^2 = du^2 + [f_1(v)X_1(u) + f_2(v)Y_1(u) + f_3(v)]^2 dv^2,$$

ove $f_1(v)$, $f_2(v)$, $f_3(v)$ non sono legate da alcuna relazione lineare a coefficienti costanti.

Partendo da questa forma andiamo a determinare in questo caso la sviluppabile direttrice Σ , e cioè l'arco s' , la flessione $\frac{1}{\rho'}$ e la torsione $\frac{1}{r'}$ del suo spigolo di regresso S in funzione di v .

Consideriamo a tal uopo l'angolo di due generatrici consecutive, con le quali vengono a coincidere due assi mobili consecutivi. Questi formano un angolo infinitesimo uguale al differenziale $d\psi_2$, dovuto alla variazione della sola v , essendo ψ_2 l'angolo definito al n° 17.

Si ha quindi manifestamente:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\partial \psi_2}{\partial v} : \frac{ds'}{dv}, \quad \text{tang } \psi_2 = \frac{f_1(v)X'_1(u) + f_2(v)Y'_1(u)}{f_1(v)\lambda + f_2(v)\mu}.$$

In questa espressione di $\frac{1}{\rho'}$ il parametro u figura apparentemente, in realtà essa dipende dalla sola v , perchè così accade dell'angolo di contingenza relativo alla S_1 .

Per calcolare $\frac{ds'}{dv}$ si osservi che ds' rappresenta anche il differenziale dell'arco dell'involuppo S_1 degli assi mobili, le cui equazioni parametriche ci sono date (n° 18) dalle funzioni X , Y di v ricavate dalle due equazioni:

$$f_1(v)X + f_2(v)Y + f_3(v) = 0, \quad f'_1(v)X + f'_2(v)Y + f'_3(v) = 0,$$

cosicchè sarà:

$$\frac{ds'}{dv} = \sqrt{\left(\frac{dX}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dv}\right)^2}.$$

Per calcolare la torsione $\frac{1}{r'}$ si osservi che l'angolo $\frac{ds'}{r'}$ è quello due piani osculatori consecutivi, con i quali viene a coincidere successivamente il piano della curva generatrice. Adunque quest'angolo è uguale all'angolo di contingenza della traiettoria di un punto qualsivoglia della curva generatrice, cosicchè possiamo scrivere:

$$\frac{ds'}{r'} = \frac{ds_v}{\rho_2}.$$

Essendo per la (36):

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\sqrt{f_1^2(v) + f_2^2(v)}}{f_1(v)X_1(u) + f_2(v)Y_1(u) + f_3(v)}$$

e

$$ds_v = [f_1(v)X_1(u) + f_2(v)Y_1(u) + f_3(v)]dv,$$

la precedente ci dà:

$$\frac{1}{r'} = \frac{\sqrt{f_1^2(v) + f_2^2(v)}}{\frac{ds'}{dv}} = \frac{\sqrt{f_1^2(v) + f_2^2(v)}}{\sqrt{\left(\frac{dX}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dv}\right)^2}}.$$

Nel caso che la sviluppabile direttrice sia un cilindro se ne calcolerà la sezione retta come si è detto al n° 16.

Se infine la sviluppabile direttrice è un cono indicando con s' l'arco della sua sezione S determinata da una sfera di raggio ρ' col centro nel vertice, sarà:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\partial \psi_2}{\partial s'} = \frac{\partial \psi_2}{\partial v} \cdot \frac{ds'}{dv}, \quad (\rho' = \text{cost.})$$

ove ψ_2 è la funzione determinata dalle (36); dunque fissato ρ' da questa formola si ricava $\frac{ds'}{dv}$.

Considerando due punti di S infinitamente vicini i piani tangenti al cono lungo le generatrici passanti per questi punti formano un angolo che è $\frac{ds'}{\rho'}$, dove $\frac{1}{\rho'}$ denota la curvatura geodetica della linea sferica S . Osservando che questi piani sono due piani normali ad una linea v , lo stesso angolo è espresso da $\frac{ds_v}{\rho_2}$, essendo ρ_2 il raggio di curvatura di detta linea.

Dunque si ha:

$$\frac{ds'}{\rho'} = \frac{ds_v}{\rho_2},$$

dalla quale, avuto riguardo alla (36), si ricava:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho_2} \frac{ds_v}{dv} \cdot \frac{ds'}{dv} = \frac{\sqrt{f_1^2(v) + f_2^2(v)}}{\frac{ds'}{dv}}.$$

Adunque della curva sferica S conosciamo la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho'}$, la curvatura normale $\frac{1}{\rho'}$ e mediante una quadratura anche l'arco s' in funzione di v . Allora potendo determinare la sua curvatura assoluta $\sqrt{\frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{r'^2}}$ e la sua torsione assoluta ¹²⁾, resta anche determinata la S e perciò anche il cono.

Le espressioni di $\frac{1}{\rho'}$ ottenute in questo caso e nel precedente mettono in luce un fatto notevole, che del resto si può dedurre dalle considerazioni del Capitolo II.

Date in un piano due curve C ed S_1 anche in posizione relativa, assumiamo C quale curva generatrice di una superficie modanata e l'altra S_1 come inviluppo degli assi mobili di rotazione.

¹²⁾ Il raggio di curvatura assoluta ρ e quello di torsione r di una linea tracciata sopra una sfera di raggio R sono legate dalla relazione:

$$R^2 = \rho^2 + \left(r \frac{d\rho}{ds} \right)^2;$$

Indicando con u ed s' rispettivamente gli archi di queste due curve, siano:

$$X = X_1(u), \quad Y = Y_1(u)$$

le equazioni parametriche di C ed

$$f_1(s')X + f_2(s')Y + f_3(s') = 0$$

l'equazione della tangente ad S_1 nell'estremo dell'arco s' .

Il quadrato dell'elemento lineare della modanata dovendo avere la forma:

$$ds^2 = du^2 + [f_1(s')X_1(u) + f_2(s')Y_1(u) + f_3(s')]^2 \Phi^2(s') ds'^2,$$

dove $\Phi(s')$ è una funzione arbitraria di s' , non potrà essere scritto se non si fissa questa funzione.

Dunque si conclude che in corrispondenza ad una data linea S_1 si hanno infinite superficie dipendenti da una funzione arbitraria.

Consideriamo ora il caso che la linea S_1 si riduca ad un punto, per es. all'origine delle coordinate. In questo caso, chiamiamo s' l'arco di una circonferenza col centro in quel punto. L'elemento lineare della superficie modanata deve assumere la forma:

$$ds^2 = du^2 + [f_1(s')X_1(u) + f_2(s')Y_1(u)]^2 ds'^2,$$

dove $f_1(s')$ ed $f_2(s')$ sono due funzioni arbitrarie di s' .

Adunque data la curva generatrice ed il centro degli assi mobili la determinazione della superficie dipende da due funzioni arbitrarie.

CAPITOLO IV.

Sulle superficie con un sistema di linee di curvatura piane.

20. Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di curve piane possa rappresentare una superficie su cui esse siano linee di curvatura. — Le superficie modanate appartengono alla classe di superficie con un sistema di linee di curvatura piane.

Supponiamo di avere riferito la superficie al doppio sistema delle linee di curvatura, di cui quelle del sistema u ($v = \text{cost.}$) siano le piane. Considerando che quando una linea di curvatura è piana, il suo piano taglia la superficie sotto angolo costante ¹³⁾ si deduce che ψ_1 deve essere costante lungo ogni linea u .

Adunque ψ_1 è funzione solo di v e quindi per la terza delle (1) e la (2), $D' = 0$,

¹³⁾ CESÀRO, loc. cit. 2), pag. 152.

come del resto si può ricavare scrivendo l'equazione differenziale delle linee di curvatura.

Per la seconda delle (1) e per la seconda delle (14) si ha:

$$(40) \quad \frac{1}{\rho_u} = \frac{\sin \psi_1}{\rho_1}, \quad \frac{1}{\rho_v} = \frac{\sin \psi_2}{\rho_2} = \frac{1}{2 G \sqrt{E}} \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{2 G_1 \sqrt{E}} \frac{\partial G_1}{\partial u} = \frac{1}{\rho_2},$$

avendo indicato con $\frac{1}{\rho_2}$ la curvatura delle immagini piane delle linee v .

Adunque resta così dimostrato il teorema:

Se sopra una superficie le linee di curvatura di un sistema sono piane, la curvatura geodetica di ogni linea di curvatura dell'altro sistema è uguale alla curvatura della sua immagine piana.

Inversamente: se si ha sopra una superficie un doppio sistema di linee ortogonali e quelle di un sistema sono piane e se la curvatura geodetica delle linee dell'altro sistema è uguale alla curvatura delle loro immagini piane il doppio sistema è quello di curvatura.

Infatti per la coesistenza della seconda delle (40) con l'ultima delle (14) Capitolo I, occorre che sia:

$$\cot \psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial u} = 0,$$

la quale dimostra il teorema.

Le modanate corrispondono al caso in cui $\psi_1 = 0$, le rigate sviluppabili al caso in cui $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$.

Consideriamo due linee u consecutive, i loro piani s'incontrano lungo una retta t che è una tangente alla S . Se ora consideriamo le due tangenti alle due linee u nei punti in cui esse sono incontrate da una loro traiettoria ortogonale, essendo anche questa una linea di curvatura, queste tangenti dovranno concorrere in un punto della t , che sarà il centro di curvatura geodetica ¹⁴⁾ della linea v che si considera.

Da ciò segue che: *i centri di curvatura geodetica delle linee v lungo una linea u si trovano tutti sopra una retta.*

Da questo teorema discende immediatamente che, *affinchè un doppio sistema (u, v) ortogonale piano possa rappresentare una superficie di cui esso sia l'immagine piana del doppio sistema di linee di curvatura è necessario e sufficiente che i centri di curvatura delle linee di un sistema (v) nei punti in cui esse sono incontrate da una linea (u) dell'altro sistema si trovino in linea retta.*

Quando adunque si ha un doppio sistema di curve in un piano che soddisfino a questa condizione si avrà una superficie con un sistema (u) di linee di curvatura piane, qualora per curva S_1 si prenda l'involuppo delle rette luogo dei centri dei cerchi osculatori delle curve (v) dell'altro sistema, *restando arbitraria la funzione che ci dà la torsione da fare acquistare alla S_1 .*

¹⁴⁾ CESÀRO, loc. cit. ²⁾, pag. 163.

21. Superficie di JOACHIMSTHAL. — Consideriamo prima il caso in cui la S_1 si riduce ad una sola retta.

In tal caso l'involuppo delle normali ad ogni linea v nel piano rappresentativo si deve ridurre ad un punto giacente sulla S_1 per cui le linee v sono nel piano dei circoli con i centri sulla S_1 e quindi sulla superficie sono delle linee sferiche.

Adunque la più generale superficie di questo tipo è costituita da un sistema ∞^1 di traiettorie ortogonali di un sistema di sfere con i centri allineati.

Il sistema piano è determinato qualora si dà una curva u e la retta S_1 . In tal caso i circoli del sistema v hanno per centri i punti di S_1 e per raggi i segmenti di tangente alla u data, contati dal punto di contatto fino al loro incontro con la retta S_1 .

Osserviamo che allora il doppio sistema ortogonale piano (u, v) è determinato senza alcuna quadratura. Infatti la determinazione delle traiettorie ortogonali di un sistema ∞^1 di circonferenze dipende dall'integrazione di un'equazione di RICCATI ed in questo caso si conoscono tre integrali particolari cioè la curva data e la retta luogo dei centri da contarsi due volte.

Assumendo [come nel Capitolo II, Caso (D)] la retta fissa per asse delle Y_1 , le equazioni del doppio sistema $(C_u), (C_v)$ saranno della forma:

$$(41) \quad \begin{cases} X_1 = R \sin \theta, \\ Y_1 = a + R \cos \theta, \end{cases}$$

con a ed R funzioni della sola u e θ funzione di u, v cosicchè per le (19)_D le equazioni della superficie saranno:

$$(42) \quad \begin{cases} X = R \sin \theta \cos \varphi, \\ Y = a + R \cos \theta, \\ Z = R \sin \theta \sin \varphi, \end{cases}$$

dove φ denota una funzione della sola v .

La relazione $F_1 = 0$, che esprime che il sistema piano (u, v) è doppiamente ortogonale, è:

$$(43) \quad \frac{da}{du} \sin \theta = R \frac{\partial \theta}{\partial u},$$

la quale si può scrivere sotto la forma:

$$\frac{da}{R du} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \log \left(\tan \frac{\theta}{2} \right).$$

Adunque θ sarà una funzione che soddisfa alla relazione

$$\tan \frac{\theta}{2} = \psi(v) e^{\int \frac{1}{R} \frac{da}{du} du}$$

ove $\psi(v)$ è funzione della sola v .

Se adunque ci riferiamo ad una particolare traiettoria ortogonale del sistema ∞^1

di circoli ($v = v_0 = \text{cost.}$) ed indichiamo con θ_0 la funzione della sola u , cui si riduce θ , seguitando a chiamare con $\psi(v)$ una funzione della sola v , la precedente si può scrivere:

$$(44) \quad \text{tang } \frac{\theta}{2} = \psi(v) \text{ tang } \frac{\theta_0}{2}.$$

Inoltre, assumendo θ_0 per variabile indipendente u e facendo sulle (43) $v = v_0$, si ha:

$$(45) \quad R = \frac{da}{d\theta_0} \text{sen } \theta_0,$$

la quale con la (44) e le (42) son dovute a JOACHIMSTHAL ¹⁵⁾.

22. Superficie con un sistema di linee di curvatura circolari. — Consideriamo il caso che sulla superficie il sistema delle linee u sia un sistema di circonferenze; la sviluppabile circoscritta allora lungo ogni linea u sarà un cono ¹⁶⁾ e quindi anche in questo caso la superficie risulta da un sistema ∞^1 di traiettorie ortogonali (le linee v) ad un certo sistema ∞^1 di sfere.

Nel caso particolare che questo sistema abbia i centri in linea retta, la superficie in discorso si può considerare manifestamente come superficie di JOACHIMSTHAL.

Questo caso sarà trattato particolarmente in appresso.

Per ottenere la superficie più generale di quelle che stiamo considerando, basta partire da un sistema piano qualsivoglia, di cui le linee u siano circonferenze.

Che non esiste altra limitazione discende dal teorema: *I circoli osculatori delle traiettorie ortogonali di qualunque semplice infinità di circonferenze, lungo ciascuna di queste, formano un fascio* ¹⁷⁾, per cui la linea S_1 è l'involuppo della retta dei centri di questo fascio.

Per dimostrare brevemente il teorema richiamato, basta considerare due circoli consecutivi della semplice infinità data ed applicare il teorema di geometria elementare: I circoli ortogonali a due circoli formano un fascio il cui asse è la retta dei centri.

Sia

$$(46) \quad \begin{cases} X_1 = a + \rho_1 \cos \theta, \\ Y_1 = b + \rho_1 \text{sen } \theta \end{cases}$$

con a, b, ρ_1 , funzioni di v , il sistema di circonferenze dato.

Supponendo θ funzione di u e v , affinchè le linee $u = \text{cost.}$ risultino ortogonali alle circonferenze occorre e basta che sia $\frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial Y_1}{\partial u} \frac{\partial Y_1}{\partial v} = 0$, la quale, in base

¹⁵⁾ DARBOUX, loc. cit. 4), I^{re} Partie, pag. 117; BIANCHI, loc. cit. 1), vol. II, pag. 270.

¹⁶⁾ G. BAGNERA, *Corso di Analisi infinitesimale* (Tipografia Matematica di Palermo), pag. 263.

¹⁷⁾ CESÀRO, loc. cit. 2), pag. 117.

alle precedenti formole, può scriversi così:

$$\frac{\frac{\partial X_1}{\partial v}}{X_1 - a} = \frac{\frac{\partial Y_1}{\partial v}}{Y_1 - b}.$$

Dalle (46) si ricava:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial v} &= \frac{da}{dv} + \frac{d\rho_1}{dv} \cos \theta - \rho_1 \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial v}, \\ \frac{\partial Y_1}{\partial v} &= \frac{db}{dv} + \frac{d\rho_1}{dv} \sin \theta + \rho_1 \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial v}\end{aligned}$$

per cui la condizione ultimamente scritta ¹⁸⁾ diventa:

$$(47) \quad \rho_1 \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{da}{dv} \sin \theta - \frac{db}{dv} \cos \theta.$$

In virtù di questa le espressioni di $\frac{\partial X_1}{\partial v}$ e $\frac{\partial Y_1}{\partial v}$ si possono scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial v} &= \left(\frac{da}{dv} \cos \theta + \frac{db}{dv} \sin \theta + \frac{d\rho_1}{dv} \right) \cos \theta, \\ \frac{\partial Y_1}{\partial v} &= \left(\frac{da}{dv} \cos \theta + \frac{db}{dv} \sin \theta + \frac{d\rho_1}{dv} \right) \sin \theta,\end{aligned}$$

e quindi si ha:

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{E_1} &= \sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial u} \right)^2} = \rho_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right), \\ \sqrt{G_1} &= \sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial v} \right)^2} = \left(\frac{da}{dv} \cos \theta + \frac{db}{dv} \sin \theta + \frac{d\rho_1}{dv} \right) \sin \theta + \frac{d\rho_1}{dv}, \\ \frac{1}{\rho_2} &= + \frac{1}{\sqrt{E_1} G_1} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u} = \frac{-\frac{da}{dv} \sin \theta + \frac{db}{dv} \cos \theta}{\rho_1 \sqrt{G_1}} = - \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \theta}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

La S_1 , involuppo degli assi mobili, è manifestamente l'involuppo della retta luogo dei centri dei circoli osculatori alle linee v lungo ciascuna circonferenza u . Ora abbiamo già detto che questi circoli osculatori formano fascio e che il luogo dei loro centri è l'asse radicale di due circonferenze u consecutive per cui l'equazione della retta dei centri si otterrà derivando rispetto a v l'equazione della circonferenza generica (46),

¹⁸⁾ Questa è l'equazione di RICCATI cui si è accennato sopra. Per ridurla alla forma classica basta porre $\tan \frac{\theta}{2} = t$; così essa diventa:

$$2\rho_1 \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{da}{dv} t - \frac{db}{dv} (1 - t^2);$$

scritta come segue: $(X - a)^2 + (Y - b)^2 = \rho_1^2$. Così si ottiene:

$$(49) \quad (X - a) \frac{da}{dv} + (Y - b) \frac{db}{dv} + \rho_1 \frac{d\rho_1}{dv} = 0.$$

Questa ci dà il significato geometrico del termine $\rho_1 \frac{d\rho_1}{dv}$: esso rappresenta, a meno del fattore normalizzante, la distanza del centro della circonferenza u che si considera dall'asse mobile corrispondente.

Supponendo che v rappresenti l'arco della curva luogo dei centri della semplice infinità di circonferenze u , sarà:

$$\left(\frac{da}{dv}\right)^2 + \left(\frac{db}{dv}\right)^2 = 1,$$

per cui la quantità indicata con ζ nel Capitolo II, cioè la distanza di un punto (X_1, Y_1) alla detta retta, ci sarà data in questo caso dall'espressione che si ricava dal primo membro di (49) quando vi si sostituisca ad X e Y i valori X_1, Y_1 (46); così si ottiene, tenendo conto della seconda delle (48):

$$\zeta = \rho_1 \left(\cos \theta \frac{da}{dv} + \sin \theta \frac{db}{dv} \right) + \rho_1 \frac{d\rho_1}{dv} = \rho_1 \sqrt{G_1}.$$

Dunque il coefficiente G è dato da:

$$(50) \quad G = G_1 + \frac{\zeta^2}{r^2} = G_1 \left(1 + \frac{\rho_1^2}{r^2} \right),$$

e quindi, per la (14):

$$(51) \quad \tan \psi_1 = \frac{r}{\rho_1}.$$

Perciò si può enunciare il teorema:

Se una superficie ammette un sistema di linee di curvatura circolari, la tangente dell'angolo che la normale alla superficie lungo ciascuno di questi cerchi fa col raggio del circolo è costante ed è eguale al rapporto della curvatura di questo circolo alla torsione dello spigolo di regresso dell'involuppo dei piani sui quali giacciono i cerchi di curvatura.

Da questo teorema si deduce che, data una semplice infinità di cerchi si può costruire una superficie che li ammette per linee di curvatura e che incontra il loro piano sempre sotto un dato angolo costante diverso da un angolo retto, perchè basta prendere la funzione arbitraria r uguale a ρ_1 a meno d'una costante moltiplicativa.

Derivando la (49) rispetto a v si ha:

$$(X - a) \frac{d^2 a}{dv^2} + (Y - b) \frac{d^2 b}{dv^2} - 1 + \frac{d}{dv} \left(\rho_1 \frac{d\rho_1}{dv} \right) = 0.$$

Indicando con ρ la flessione del luogo dei centri della semplice infinità di cerchi data, sarà

$$\frac{1}{\rho} = \frac{da}{dv} \frac{d^2 b}{dv^2} - \frac{db}{dv} \frac{d^2 a}{dv^2},$$

per cui dalla precedente e dalla (49) si ricavano le seguenti equazioni parametriche della curva S_1 :

$$X = a + \rho \frac{db}{dv} - \rho \frac{d}{dv} \left(\rho_1 \frac{d\rho_1}{dv} \frac{db}{dv} \right),$$

$$Y = b - \rho \frac{da}{dv} + \rho \frac{d}{dv} \left(\rho_1 \frac{d\rho_1}{dv} \frac{da}{dv} \right).$$

Da queste si deduce, come del resto è evidente geometricamente, che se i cerchi di curvatura sono tutti uguali $\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial v} = 0 \right)$ la curva S_1 è la sviluppata del luogo dei centri.

23. La ciclide di DUPIN. — Proponiamoci il problema di trovare una superficie con ambedue i sistemi di linee di curvatura circolari.

In tal caso, come si è visto precedentemente, ρ_1 e ψ_1 debbono essere funzioni della sola v e poi per le analoghe considerazioni relative alle linee v debbono essere ρ_2 e ψ_2 funzioni solamente di u . Dalla seconda delle (40) allora si conclude che anche tale è $\bar{\rho}_2$, cioè che, *il sistema piano rappresentativo di ogni ciclide deve essere costituito da un doppio sistema di cerchi ortogonali*.

Ora è noto che ogni doppio sistema piano di cerchi ortogonali consta di due fasci i cui assi radicali sono perpendicolari e di cui uno incontra le corrispondenti circonferenze in due punti reali e l'altro incontra le corrispondenti circonferenze in due punti immaginari ed eccezionalmente in due punti reali e coincidenti.

Nel caso in cui il sistema piano è costituito da un fascio di rette e dalle circonferenze aventi il centro nel centro del fascio, la ciclide è un toro o un cono retto circolare se si pigliano per curve u le circonferenze e quindi per curva S_1 la retta all'infinito del piano; mentre, quando si assumono per curve u le rette del fascio, la curva S_1 si riduce ad un punto che è il centro dei cerchi e la ciclide risulta un cono retto circolare.

Riferendoci al caso generico prendiamo per linee u il sistema di cerchi aventi due punti base reali A e B ed indichiamo con $2a$ la lunghezza del segmento \overline{AB} .

Chiamando con v l'angolo sotto cui è veduto questo segmento da un punto P d'un cerchio u di raggio ρ_1 , sarà:

$$(52) \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{\sin v}{a}.$$

Se ora per parametro u prendiamo il logaritmo del rapporto $\frac{BP}{AP}$, il quadrato dell'elemento lineare piano:

$$ds^2 = E du^2 + G_1 dv^2$$

assume la forma isometrica ¹⁹⁾ e si ha:

$$(53) \quad \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{1}{\sqrt{G_1}} = \frac{\cos v}{a} - \frac{e^u + e^{-u}}{2a}.$$

¹⁹⁾ CESÀRO, loc. cit. ²⁾, pag. 119, c).

Da questa si avrà, differenziando rispetto ad u , la curvatura $\frac{1}{\rho_2}$ delle linee piane v , cioè (40) la curvatura geodetica delle corrispondenti linee sulla superficie; così otteniamo:

$$(54) \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_v} = - \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{e'' - e^{-u}}{2a}.$$

La ciclode resterà adunque determinata quando si conosce ψ_1 e quindi ψ_2 che, come sappiamo, debbono essere funzioni solamente di v e di u . In virtù di ciò, per le (52) e (54) le curvature normali della superficie:

$$(55) \quad \frac{1}{R_u} = \frac{\cos \psi_1}{\rho_1} = \frac{D}{E}, \quad \frac{1}{R_v} = \frac{\cos \psi_2}{\rho_2} = \frac{D''}{G} = \frac{D'' \sin^2 \psi_1}{E}$$

saranno rispettivamente funzioni solamente di v e di u , per cui, chiamandole per semplicità U e V , sarà:

$$(56) \quad D = EV, \quad D'' = GU = \frac{EU}{\sin^2 \psi_1}.$$

Queste, come è facile verificare, soddisfano alla (4) del Capitolo I, ove si ponga $D' = 0$, $G = \frac{G_1}{\sin^2 \psi_1} = \frac{E}{\sin^2 \psi_1}$ ed all'analogia che da essa si ottiene cambiando D , u , v , ψ_1 rispettivamente in D'' , v , u , ψ_2 , le quali esprimono che le linee u e v sulla superficie sono linee piane.

Le prime due delle (7) che esprimono le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza della superficie, ci danno in questo caso:

$$\frac{\partial}{\partial v}(EV) - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}(V + U) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(EU) - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u}(U + V) = 0,$$

cioè successivamente:

$$E \frac{dV}{dv} + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}(V - U) = 0,$$

$$E \frac{dU}{du} + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u}(U - V) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \log(V - U) + \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{E} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \log(U - V) + \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{E} = 0,$$

alle quali si soddisfa con:

$$V - U = \frac{b}{\sqrt{E}}, \quad (b = \text{cost.})$$

cioè per la (53):

$$V - U = b \left[\frac{\cos v}{a} - \frac{e^u + e^{-u}}{2a} \right].$$

Adunque si deve avere

$$(57) \quad V = \frac{1}{R_u} = \frac{b \cos v - c}{a}, \quad U = \frac{1}{R_v} = \frac{b(e^u + e^{-u}) - 2c}{2a} = \frac{b \operatorname{ch} u - c}{a}.$$

Da queste, poichè per le (1) Capitolo I, si ha:

$$\cos \psi_1 = \frac{\rho_1}{R_u}, \quad \operatorname{tang} \psi_2 = \frac{R_v}{\rho_v} = \frac{R_v}{\rho_2},$$

tenendo presenti le espressioni di ρ_1 e $\bar{\rho}_2$ trovate (52), (54) si deduce:

$$(58) \quad \begin{cases} \cos \psi_1 = \frac{1}{\sin v} (b \cos v - c), \\ \cot \psi_2 = \frac{2}{e^u - e^{-u}} \left[b \frac{e^u + e^{-u}}{2} - c \right] = \frac{1}{\operatorname{sh} u} [b \operatorname{ch} u - c]. \end{cases}$$

Da queste formole si scorge che le costanti b e c restano determinate quando si assegnano i valori costanti di ψ_1 e ψ_2 rispettivamente lungo una linea u e lungo una linea v , o ciò che torna lo stesso in un punto della superficie.

Qualunque sia del resto il modo come si determinano i valori di queste costanti, se la superficie è reale esse soddisfano ad una disuguaglianza, che si deduce dalla prima delle (58) considerando che i valori assoluti di $\sin v$ e $\cos v$ sono compresi nell'intervallo (0, 1).

Risolvendo le (58) si trova:

$$(59) \quad \begin{cases} \sin v = \frac{-c \cos \psi_1 + b \sqrt{b^2 + \cos^2 \psi_1 - c^2}}{b^2 + \cos^2 \psi_1}, \\ \cos v = \frac{bc + \cos \psi_1 \sqrt{b^2 + \cos^2 \psi_1 - c^2}}{b^2 + \cos^2 \psi_2}, \end{cases}$$

intendendo che il doppio segno sia insito nel radicale.

Da queste formole segue che affinchè $\sin v$ e $\cos v$ siano reali occorre e basta che:

$$b^2 + \cos^2 \psi_1 \geq c^2.$$

Ora il valore massimo che può assumere $\cos^2 \psi_1$ è l'unità, per cui si deduce che in ogni caso deve essere:

$$(60) \quad b^2 + 1 \geq c^2.$$

Determinate le costanti, resta definita la funzione ψ_1 e quindi [Capitolo II, Caso (D)] si potranno scrivere le equazioni parametriche della superficie, quando siano note quelle del doppio sistema piano rappresentativo.

Per scrivere queste assumiamo la retta AB e la perpendicolare ad essa nel punto di mezzo O di AB rispettivamente per asse delle X e per asse delle Y .

Il centro C d'una circonferenza u ha l'ascissa nulla e l'ordinata uguale ad $a \cot v$, per cui le equazioni (46) del doppio sistema ortogonale sono:

$$(61) \quad X_1 = a \frac{\cos \theta}{\sin v}, \quad Y_1 = a \frac{\cos v + \sin \theta}{\sin v}.$$

La seconda delle (48) ci dà, tenendo presente la (52):

$$(62) \quad \sqrt{E} = \sqrt{G_1} = \frac{-a}{\sin^2 v} (\cos v + \sin \theta) = -\frac{\bar{Y}_1}{\sin v},$$

la quale, ove per \sqrt{E} si sostituisce la sua espressione (53), ci dà θ in funzione di u e di v .

Note così le equazioni parametriche (61) del doppio sistema piano di circoli che rappresenta la ciclode, come si è detto si potranno scrivere le equazioni parametriche di questa superficie.

Vogliamo studiare la superficie senza ricorrere a questo.

Supposto adunque data una delle costanti, per es.: b , la c deve soddisfare alla condizione (60).

Se si assume $b^2 + 1 = c^2$, dovrà per le (59) essere ψ_1 costantemente nullo o uguale a π e quindi

$$\sin v = \frac{\mp 1}{\sqrt{b^2 + 1}}, \quad \cos v = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}},$$

cosicchè il segmento AB è veduto sempre sotto uno degli angoli dati da queste formole, le quali determinano due circoli simmetrici rispetto alla retta AB . Dunque la superficie è un toro.

Tornando allo studio della superficie generale, essa è in ogni caso simmetrica rispetto al piano β perpendicolare ad AB nel punto di mezzo O .

Derivando l'espressione (58) di $\cos \psi_1$, si ottiene:

$$(63) \quad \frac{d\psi_1}{dv} = \frac{b - c \cos v}{\sin \psi_1 \sin^2 v},$$

dimodochè i valori massimi o minimi dei parametri ψ_1 e v , sono da ricercarsi tra quelli per cui si verifica una delle equazioni:

$$b - c \cos v = 0, \quad \sin v = 0, \quad \sin \psi_1 = 0$$

insieme alla prima delle (58), cioè a

$$\cos \psi_1 = \frac{b \cos v - c}{\sin v}.$$

Se esistono valori di v per cui si ha $b - c \cos v = 0$, in generale essi sono quelli per cui ψ_1 raggiunge un estremo.

Dalla relazione $\cos \psi_1 = \frac{b \cos v - c}{\sin v}$ si deduce che affinchè a $\sin v = 0$ cor-

risponda un valore reale di ψ_1 , occorre che si abbia simultaneamente:

$$(64) \quad \text{sen } v = 0, \quad b \cos v - c = 0,$$

e quindi $b^2 = c^2$.

Il valore di $\cos \psi_1$ corrispondente a $\text{sen } v = 0$, si avrà applicando al secondo membro della precedente la regola di l'HOSPITAL; così si ricava che allora deve essere $\cos \psi_1 = 0$ e quindi $\text{sen } \psi_1 = \pm 1$.

Quando sono soddisfatte le (64), poichè allora la seconda di esse equivale all'altra $b - c \cos v = 0$, il valore corrispondente di $\frac{d\psi_1}{dv}$ datoci dalla (63) risulta indeterminato; però applicando la regola di l'HOSPITAL si ottiene:

$$\frac{d\psi_1}{dv} = \pm \frac{c}{2},$$

e quindi non è il caso di parlare di estremo assoluto di v .

Adunque i valori estremi di v possono essere solo quelli per cui si ha $\text{sen } \psi_1 = 0$, cioè, per la prima delle (58), quelli per cui è verificata l'equazione

$$1 - \cos^2 v = (b \cos v - c)^2,$$

la quale, quando si conviene di considerare solamente quei valori di v compresi nell'intervallo $(0, \pi)$, ci dà due valori v_0, v_1 di v i cui seni *positivi* soddisfano alle due relazioni:

$$(65) \quad \text{sen } v_0 = b \cos v_0 - c, \quad \text{sen } v_1 = c - b \cos v_1.$$

Questi due valori v_0 e v_1 corrispondono veramente a due estremi di v , poichè come è facile verificare partendo da (63), si ha per essi $\frac{d^2 v}{d\psi_1^2} \neq 0$.

Ciò posto tre casi sono da distinguere, secondo che si ha:

$$b^2 < c^2 < b^2 + 1, \quad c^2 < b^2, \quad c^2 = b^2.$$

Dalla considerazione delle (59) si scorge che nel primo caso $\cos^2 \psi_1$ può assumere solo i valori compresi nell'intervallo $(c^2 - b^2, 1)$ nel secondo e nel terzo tutti i valori possibili.

In corrispondenza a questi tre casi abbiamo tre tipi di superficie sulle quali la linea dei punti parabolici risulta delle circonferenze corrispondenti a quei valori di u e di v per cui è soddisfatta almeno una dalle equazioni che si deducono dalle (58) ponendo $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ oppure $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$, cioè:

$$b \cos v - c = 0 \quad \text{oppure} \quad b \cosh u - c = 0.$$

Da queste risolvendo si ha:

$$\cos v = \frac{c}{b}, \quad e'' = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - b^2}}{b},$$

e quindi le superficie del primo tipo ($b^2 < c^2 < b^2 + 1$) hanno una linea di punti parabolici reale costituita da due cerchi v corrispondenti a due valori reciproci di e'' , e per ciò simmetrici rispetto al piano β perpendicolare ad AB nel punto di mezzo. Le superficie del secondo tipo ($c^2 < b^2$), qualora per ragione di simmetria si considerano tutti i possibili valori di v , hanno la linea di punti parabolici costituita da due cerchi u uguali, e quelle del terzo tipo dalle due linee $v = 0$, $u = 0$ che sono due rette come si deduce dalle (57), (52) e (54).

Per le superficie del primo e del secondo tipo la linea dei punti parabolici è inviluppo di assintotiche ²⁰), poichè lungo essa si ha per la (56) e (57):

$$D'' = 0, \quad D \neq 0, \quad \frac{\partial D''}{\partial v} = 0$$

oppure

$$D = 0, \quad D'' \neq 0, \quad \frac{\partial D}{\partial u} = 0.$$

Dalla (52), cioè da:

$$\rho_1 = \frac{a}{\sin v},$$

si scorge che tutte le circonferenze u , che costituiscono la superficie sono quelle i cui raggi sono compresi nell'intervallo i cui estremi sono i valori assoluti delle quantità $\frac{a}{\sin v_0}$ ed $\frac{a}{\sin v_1}$, una delle quali nel caso delle superficie del terzo tipo ha valore infinito.

Considerando poi che lungo le due circonferenze aventi i raggi rispettivamente uguali ad $\frac{a}{\sin v_0}$ e ad $\frac{a}{\sin v_1}$ si ha per le (57) e (65)

$$\frac{1}{R_u} = \frac{b \cos v_0 - c}{a} = \frac{\sin v_0}{a}, \quad \frac{1}{R_u} = -\frac{\sin v_1}{a},$$

si conclude che queste due circonferenze sulla superficie sono geodetiche e si può dimostrare che sono inoltre complanari.

Esclusi i punti A, B considerati come limiti di circonferenze v , anche tra queste esistono due geodetiche, quelle per cui $\psi_2 = 0$, cioè, per la (58), quelle per cui si ha $\text{sh } u = 0$, e quindi $e'' = \pm 1$. Queste geodetiche sono in ogni caso le sezioni della superficie col piano perpendicolare ad AB nel punto di mezzo.

I raggi di queste circonferenze ci sono dati in base alle citate formole da:

$$R_v = \frac{a}{b - c}, \quad R_v = \frac{-a}{b + c},$$

e si può dimostrare che queste circonferenze per le superficie del primo tipo sono in-

²⁰) Vedi la nostra nota, *Sulla linea dei punti parabolici di una superficie* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XLI (1916), pag. 54-58].

terne l'una all'altra, per quelle del secondo tipo esterne l'una all'altra e per quelle del terzo tipo si riducono ad una retta e ad una circonferenza non secanti.

Tanto basta per avere un'idea chiara dei tre tipi di cicli di che stiamo considerando.

Nella rappresentazione piana dei due primi tipi di superficie le linee u sono le circonferenze del fascio interne alle due lunule determinate da una delle due circonferenze v_0 , v_1 e dalla simmetrica dell'altra rispetto ad AB . Per le superficie del terzo tipo, supposto $v_0 \neq 0$ e $v_1 = 0$, le circonferenze u sono la v_0 , la retta AB e tutte quelle che hanno raggio maggiore che quello di v_0 con i centri dalla banda di AB in cui giace il centro di v_0 .

Riferendoci alla sezione della superficie, che si considera, col piano delle circonferenze v_0 , v_1 siano C e D i centri di queste ed (E, F) , (G, H) le coppie di punti in cui esse sono incontrate rispettivamente dalla CD , segnati in modo che E e G restino dalla stessa banda di AB . Le circonferenze sezioni col piano perpendicolare ad AB nel punto di mezzo avranno per diametri FG ed EH se essa è del primo tipo, EG ed FH se essa è del secondo tipo.

Le normali alla superficie nei punti dove i circoli v_0 e v_1 sono tagliati da un circolo generico $u = \text{cost.}$ coincidono coi raggi dei circoli v_0 e v_1 appunto perchè questi sono geodetiche.

Il luogo dei punti d'incontro di queste normali è una curva cui si riduce una falda dell'evoluta.

Questa curva è un'iperbole o un'ellisse secondo che si è in presenza di una superficie del primo o del secondo tipo, i cui fuochi sono in ogni caso i centri C , D .

Infatti, riferendoci per esempio alle superficie del secondo tipo, se P e Q sono i due punti uno di v_0 e l'altro di v_1 in cui queste sono incontrate da un circolo ad esse ortogonale, i quali punti nel nostro caso sono dalla stessa banda di AB , le rette CP , DQ s'incontreranno in un punto R tale che: $QR = RP$, per cui si avrà:

$$CR + DR = CP + DQ = r_0 + r_1,$$

chiamando con r_0 ed r_1 i raggi delle circonferenze v_0 e v_1 , ciò che prova la proposizione.

Questa ellisse passa evidentemente per i punti A e B ed inoltre per i punti di mezzo dei segmenti FH , EG .

Infatti, chiamando I il punto di mezzo di FH , si ha:

$$CI + DI = CI + HI + DH = CI + IF + DH = CF + DH = r_0 + r_1.$$

Analogamente si procede per dimostrare che l'iperbole relativa alle superficie del primo tipo passa per A e B , tra la differenza dei raggi vettori uguale a $|r_0 - r_1|$ e passa per i punti di mezzo dei segmenti FG , EH .

Nel caso particolare in cui $r_0 = r_1$ la ciclode è un toro e l'iperbole in discorso si riduce alla retta AB .

Considerazioni analoghe provano che l'altra falda dell'evoluta nei due casi si riduce ordinatamente ad una ellissi o ad una iperbole, che si ottengono con costruzioni ana-

loghe sostituendo alle due circonferenze v_0, v_1 , quelle di diametri FG ed EH per le superficie del primo tipo e quelle di diametri EG, FH per quelle del secondo tipo.

Da ciò si conclude che per i primi due tipi le due falde dell'evoluta di una ciclode si riducono ad una ellissi e ad una iperbole in piani perpendicolari e tali che ciascuna passa per i fuochi dell'altra.

Analogamente per le superficie del terzo tipo, come facilmente si può dimostrare le due falde dell'evoluta si riducono ad una coppia di parabole in due piani perpendicolari l'una passante per il fuoco dell'altra.

Non insistiamo più oltre, poichè da quanto precede risulta chiaramente come si debba procedere per lo studio delle ciclidi che si ottengono assumendo per linee u i cerchi di un fascio con i punti base immaginari eventualmente coincidenti in un punto reale.

Palermo, luglio 1916.

VITTORIO STRAZZERI.

INDICE

	PAGINE
Introduzione	I

CAPITOLO I.

Sezioni piane di una superficie.

1. Formole fondamentali e condizione perchè un sistema di linee sopra una superficie sia piano	3
2. Rappresentazione piana della superficie con la conservazione delle linee di un sistema e dell'ortogonalità di esso col sistema ortogonale	4
3. Caso delle superficie modanate	6
4. Caso delle superficie rigate	7
5. La rappresentazione studiata non conserva gli angoli	8
6. Superficie che ammettono una data rappresentazione piana	8

CAPITOLO II.

Costruzione di superficie che ammettono come sezioni piane un prefissato sistema ∞^1 di curve piane.

7. Posizione del problema.	9
8. Caso (A). — Determinazione intrinseca della superficie.	10
9. Caso (A). — Equazioni parametriche in termini finiti della superficie.	11
10. Caso (B).	13
11. Caso (C)	14
12. Caso (D)	15
13. Caso (E).	15

CAPITOLO III.

Superficie modanate.

14. Forma dell'elemento lineare delle modanate	16
15. Modanate non deformabili in altre modanate con deformazione della curva generatrice . . .	17
16. Modanate deformabili in altre con deformazione della curva generatrice	24
17. Modanate deformabili in altre con conservazione del cilindro direttore	26
18. Determinazione del luogo degli assi immobili data la curva generatrice e la curvatura totale della superficie lungo le traiettorie di due punti	27
19. Determinazione della sviluppabile direttrice Σ	29

CAPITOLO IV.

Sulle superficie con un sistema di linee di curvatura piane.

20. Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di curve piane possa rappresentare una superficie su cui esse siano linee di curvatura	32
21. Superficie di JOACHIMSTHAL	34
22. Superficie con un sistema di linee di curvatura circolari	35
23. La ciclode di DUPIN	38

SULLA RISOLUZIONE APIRISTICA, IN UN CORPO QUADRATICO, DELLE CONGRUENZE BINOMIE SECONDO UN IDEALE PRIMO.

Nota di **Vincenzo Amato** (Catania).

Adunanza del 9 luglio 1916.

Essendo m un numero intero relativo, non divisibile per il quadrato di alcun numero primo, denotiamo con $k(\sqrt{m})$ il corpo quadratico determinato dal numero \sqrt{m} , cioè l'insieme delle espressioni razionali di \sqrt{m} . Posto

$$\omega = \sqrt{m},$$

ovvero

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{m}}{2},$$

secondo che abbia luogo il primo o il secondo dei seguenti casi:

$$m \not\equiv 1, \quad m \equiv 1 \pmod{4},$$

è noto ¹⁾ che un intero del corpo $k(\sqrt{m})$ si può mettere sotto la forma

$$\alpha + \beta \omega,$$

essendo α e β interi razionali.

Sia P un ideale primo del corpo $k(\sqrt{m})$, e p il numero (intero razionale) primo che appartiene a P .

Una congruenza binomia il cui modulo sia P , si può mettere sotto la forma

$$(1) \quad x^n \equiv a \pmod{P},$$

supponendo, senza ledere la generalità, che n sia divisore di $N(P) - 1$, essendo $N(P)$ la norma di P , cioè

$$N(P) = p,$$

ovvero

$$N(P) = p^2,$$

¹⁾ Cfr. I. SOMMER, *Vorlesungen über Zahlentheorie. Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlkörper* [Leipzig und Berlin, Teubner, 1907]; o la traduzione francese di A. LÉVY: *Introduction à la théorie des nombres algébriques* [Paris, Hermann, 1911]. Cfr. anche P. BACHMANN, *Grundlehren der neueren Zahlentheorie* [Leipzig, Göschen 1907]. Si possono anche consultare le seguenti opere:

P. G. LEJEUNE DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4 Aufl. (Braunschweig, F. Vieweg und Sohn, 1894); o la traduzione in italiano di A. FAIFOFER (Venezia, tip. Emiliana, 1881).

D. HILBERT, *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper* [Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, t. IV (1897)]; o la traduzione francese di A. LÉVY [Paris, Hermann, 1913].

a seconda che P sia di 1° o di 2° grado. Il numero a è supposto intero del corpo $k(\sqrt{m})$, soddisfacente alla condizione

$$(2) \quad a^{\frac{N(P)-1}{n}} \equiv 1 \pmod{P}.$$

La (1) ammette n soluzioni (appartenenti all'ideale formato dagli'interi del corpo dato).

Sia P di 1° grado. I numeri

$$0, 1, 2, \dots, p-1$$

formano evidentemente un sistema completo di resti secondo P . Si può perciò sostituire nella (1) ad a il numero intero razionale, che denoteremo con la stessa lettera, al quale a è congruo (mod. P). La congruenza

$$x^n \equiv a \pmod{p}$$

ammette intanto, poichè ha luogo la condizione

$$a^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{p},$$

n radici le quali costituiscono le n soluzioni della (1).

La risoluzione della (1), se P è di 1° grado, è perciò rimandata alla risoluzione di una congruenza binomia (mod. p) nel corpo razionale.

Sia P di 2° grado ²⁾. I numeri che lo compongono sono i multipli (secondo qualsiasi intero del corpo) di p , cioè si possono mettere sotto la forma $p(\alpha + \beta\omega)$, essendo α e β interi razionali.

La risoluzione della (1) si può allora rimandare alla risoluzione di due congruenze (mod. p) nel corpo razionale. Infatti, posto

$$a = \alpha + \beta\omega,$$

$$x = x_1 + x_2\omega,$$

si ha dalla (1):

$$(x_1 + x_2\omega)^n \equiv \alpha + \beta\omega \pmod{P},$$

dalla quale congruenza, separando i coefficienti di ω nei due membri dagli altri termini di essi che non dipendono da ω , si ricavano due congruenze nelle x_1, x_2 secondo il modulo p .

In questo lavoro sarà trattata, sempre nell'ipotesi che P sia un ideale primo di 2°

²⁾ Fissato il numero m , perchè un numero primo p del corpo $k(\sqrt{m})$ dia luogo all'ideale principale $(p) = P$ primo di 2° grado, il discriminante d del corpo, che è $4m$, se $m \not\equiv 1 \pmod{4}$, ed è m , se $m \equiv 1 \pmod{4}$, deve essere non-residuo quadratico di p : ciò che, col simbolo di LEGENDRE, si esprime con la notazione: $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$.

grado, la questione più generale di determinare un polinomio in a (*soluzione apiristica*) che fornisca, per ogni a residuo n^{ico} di P , una soluzione della (1). La questione è stata risolta dal CIPOLLA ³⁾ nel corpo razionale con un procedimento che può estendersi facilmente ad un corpo algebrico qualunque ⁴⁾. In tal caso però la ricerca merita di essere approfondita, perchè, avendo di mira il lato pratico della questione, conviene ricondurre l'investigazione nel corpo razionale. È quello che ci proponiamo di fare in questa nota, limitatamente ad un corpo quadratico qualunque. Mostreremo infatti che nel corpo $k(\sqrt{m})$ la determinazione di una soluzione apiristica della (1) si può rimandare alla risoluzione di congruenze, secondo il modulo p , aventi per coefficienti numeri noti (e però indipendenti da a), le cui soluzioni debbono pertanto ritenersi note.

Ci occuperemo poi di ricercare in quali corpi quadratici le soluzioni della congruenza

$$x^n \equiv 1 \pmod{P}$$

siano le n radici n^{me} dell'unità e perciò indipendenti dal modulo P , cosicchè la risoluzione apiristica della (1) possa effettuarsi qualunque sia il modulo stesso P : troveremo che ciò ha luogo per un corpo quadratico qualunque quando $n = 2$, per il corpo $k(\sqrt{-1})$ dei numeri complessi di GAUSS per $n = 4$, e per il corpo $k(\sqrt{-3})$, definito da una radice cubica primitiva dell'unità, per $n = 3$ ed $n = 6$. Questo risultato è anche notevole per il fatto che in questi due corpi sussiste l'unicità della decomposizione dei numeri in fattori primi, cosicchè si rende inutile l'introduzione del concetto di ideale ⁵⁾.

I. Data la congruenza

$$(3) \quad x^n \equiv a \pmod{p},$$

essendo n divisore di $p - 1$ (ciò che si può supporre senza ledere la generalità), e

$$a^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{p},$$

la risoluzione apiristica della (3) è fondata sulla ricerca di un sistema completo di n^{imo} grado (mod. p), cioè di un sistema di $\frac{p-1}{n}$ numeri le cui potenze n^{ime} siano tutte incongrue fra loro (mod. p).

³⁾ M. CIPOLLA, *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie secondo un modulo primo* [Mathematische Annalen, Bd. LXIII (1906), pp. 54-61].

⁴⁾ Il D.^{te} A. LANCIA, nella sua dissertazione di laurea (1915, inedita), ha esteso le principali proprietà delle congruenze ordinarie a quelle i cui moduli sono ideali primi, ed ha applicato il metodo del CIPOLLA, di cui faremo parola in seguito, alla risoluzione delle congruenze binomie secondo un ideale primo di un corpo algebrico.

⁵⁾ P. BACHMANN, *Zahlentheorie. III. Teil: Die Lehre von der Kreistheilung* [Leipzig, Teubner, 1872] pp. 150-156 e pp. 185-190.

La determinazione di un sistema completo di n^{imo} grado si può fare cercando prima un sistema completo di soluzioni della congruenza

$$(4) \quad x^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Se

$$1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$$

è un tale sistema, si può sempre determinare un sistema completo di numeri incongrui tra loro (mod. p), e non divisibili per p , della forma seguente

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & & \gamma_1, & & \gamma_2, & \dots, & \gamma_{n-1}, \\ a_1, & & a_1 \gamma_1, & & a_1 \gamma_2, & \dots, & a_1 \gamma_{n-1}, \\ a_2, & & a_2 \gamma_1, & & a_2 \gamma_2, & \dots, & a_2 \gamma_{n-1}, \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{\frac{p-1}{n}-1}, & & a_{\frac{p-1}{n}-1} \gamma_1, & & a_{\frac{p-1}{n}-1} \gamma_2, & \dots, & a_{\frac{p-1}{n}-1} \gamma_{n-1}. \end{array}$$

Allora, per ottenere un sistema completo di n^{imo} grado basterà scegliere un numero e uno solo di ciascuna riga di questo quadro.

Determinato un sistema completo

$$r_1, r_2, \dots, r_{\frac{p-1}{n}}$$

di n^{imo} grado, si dimostra che il polinomio

$$A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \dots + A_{\frac{p-1}{n}-1} a^{\frac{p-1}{n}-1},$$

nel quale sia

$$A_b \equiv -n(r_1^{n^b-1} + r_2^{n^b-1} + \dots + r_{\frac{p-1}{n}}^{n^b-1}) \pmod{p},$$

è una soluzione apiristica della congruenza binomia (3).

Un particolare notevole sistema di n^{imo} grado si ottiene subito, quando sia nota una radice primitiva g di p : tale è il sistema

$$1, g, g^2, \dots, g^{\frac{p-1}{n}-1}.$$

2. L'analisi del CIPOLLA riassunta nel n° 1 per la risoluzione apiristica della (3) nel corpo razionale, si può facilmente estendere per la risoluzione apiristica della (1) in un corpo quadratico: basta cambiare p in $N(P) = p^2$ (avendo supposto P di 2° grado), e mod. p in mod. P .

Anche in un corpo quadratico la conoscenza di una radice primitiva g di P potrebbe servire alla determinazione del sistema completo di n^{imo} grado (mod. P):

$$1, g, g^2, \dots, g^{\frac{p^2-1}{n}-1}.$$

Noi fonderemo la determinazione di un sistema completo di n^{imo} grado (mod. P) sulla risoluzione della congruenza

$$(5) \quad x^n \equiv 1 \pmod{P}.$$

3. Se P è di 2° grado, e se n (oltre ad essere, come abbiamo supposto, divisore di $p^2 - 1$) è divisore di $p - 1$, la determinazione di un sistema completo di n^{imo} grado (mod. P) si può far dipendere dalla determinazione di un sistema completo di soluzioni della (4).

Infatti le n radici della (4) soddisfano evidentemente alla (5) e costituiscono perciò, essendo numeri incongrui rispetto a P , le soluzioni della (5). Indichiamole con

$$1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}.$$

I numeri

$$r + s\omega,$$

allorchè si faccia

$$r, s = 0, 1, 2, \dots, p-1,$$

e si escluda il caso: $r = s = 0$, costituiscono un sistema completo di $p^2 - 1$ resti (non $\equiv 0$) secondo il mod. P . Con questi stessi numeri o con numeri ad essi congrui si può formare il quadro seguente:

$$(A) \quad \begin{cases} 1, & \gamma_1, & \gamma_2, \dots, & \gamma_{n-1}, \\ a_1, & a_1 \gamma_1, & a_1 \gamma_2, \dots, & a_1 \gamma_{n-1}, \\ a_2, & a_2 \gamma_1, & a_2 \gamma_2, \dots, & a_2 \gamma_{n-1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\frac{p-1}{n}-1}, & a_{\frac{p-1}{n}-1} \gamma_1, & a_{\frac{p-1}{n}-1} \gamma_2, \dots, & a_{\frac{p-1}{n}-1} \gamma_{n-1}, \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} \alpha_1, & \alpha_1 \gamma_1, & \alpha_1 \gamma_2, \dots, & \alpha_1 \gamma_{n-1}, \\ \alpha_2, & \alpha_2 \gamma_1, & \alpha_2 \gamma_2, \dots, & \alpha_2 \gamma_{n-1}, \\ \alpha_3, & \alpha_3 \gamma_1, & \alpha_3 \gamma_2, \dots, & \alpha_3 \gamma_{n-1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\frac{p(p-1)}{n}}, & \alpha_{\frac{p(p-1)}{n}} \gamma_1, & \alpha_{\frac{p(p-1)}{n}} \gamma_2, \dots, & \alpha_{\frac{p(p-1)}{n}} \gamma_{n-1}, \end{cases}$$

nel quale figurano i $p - 1$ resti interi razionali

$$1, 2, \dots, p - 1$$

distribuiti in (A), e gli altri $p(p - 1)$ resti in (B).

Scelto un numero e uno solo di ciascuna riga di (A) e (B) si avrà un sistema completo di n^{imo} grado (mod. P), cioè un sistema di $\frac{p^2 - 1}{n}$ numeri le cui potenze n^{ime} sono tutte incongrue (mod. P).

4. Se P è di 2° grado, e se n (divisore di $p^2 - 1$) non è divisore di $p - 1$, la determinazione di un sistema completo di n^{imo} grado (mod. P) si può far dipendere dalla determinazione di sistemi completi di soluzioni:

a) di congruenze binomie, nel corpo razionale, come la (4), aventi il grado divisore di $p - 1$,

b) di congruenze binomie della forma seguente

$$x^k \equiv 1 \pmod{P},$$

essendo k primo con $p - 1$

c) di congruenze binomie \pmod{P} il cui grado sia divisore di $p - 1$.

Sia infatti

$$\delta = D(p - 1, n).$$

Poichè

$$x^n - 1 = (x^\delta - 1)(x^{n-\delta} + x^{n-2\delta} + \dots + x^\delta + 1),$$

si ha che delle n soluzioni della (5), δ sono rispettivamente congrue \pmod{P} alle δ radici della congruenza

$$x^\delta \equiv 1 \pmod{p},$$

e le altre $n - \delta$ sono le soluzioni della congruenza

$$x^{n-\delta} + x^{n-2\delta} + \dots + x^\delta + 1 \equiv 0 \pmod{P}.$$

Posto

$$x^\delta \equiv \zeta \pmod{P},$$

la congruenza precedente si può scrivere:

$$\zeta^{\frac{n-\delta}{\delta}} + \zeta^{\frac{n-\delta}{\delta}-1} + \dots + \zeta^2 + \zeta + 1 \equiv 0 \pmod{P},$$

le cui soluzioni sono quelle della congruenza binomia:

$$\zeta^{\frac{n}{\delta}} \equiv 1 \pmod{P},$$

esclusa la soluzione 1.

Siamo perciò passati dell'esponente n all'esponente $\frac{n}{\delta}$, che può o no esser primo con $p - 1$. Nel primo caso il teorema è dimostrato, nel secondo caso si continua nello stesso modo fino a trovare una congruenza della forma

$$(6) \quad x^k \equiv 1 \pmod{P}$$

il cui grado sia primo con $p - 1$.

Il teorema è perciò dimostrato in ogni caso. Proveremo ora che la determinazione di sistemi completi di soluzioni delle congruenze di cui si parla nelle parti b) e c) dell'enunciato, si può rimandare alla risoluzione nel corpo razionale di congruenze, aventi per modulo p , i cui coefficienti sono numeri noti.

5. Proponiamoci prima di tutto la determinazione di un sistema completo di soluzioni della (6). Questa congruenza, poichè k è primo con $p - 1$, non ha evidentemente, all'infuori della soluzione 1, altre soluzioni intere razionali. Essa però ammette, poichè k è divisore di $p^2 - 1$, k soluzioni:

$$1, \quad r_1 + s_1 \omega, \quad r_2 + s_2 \omega, \quad \dots, \quad r_{k-1} + s_{k-1} \omega,$$

con r_i, s_i interi razionali minori di p e con $s_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$).

Distinguiamo il caso in cui sia:

$$\omega = \sqrt{m},$$

dall'altro in cui sia:

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{m}}{2}.$$

Nel primo caso, perchè abbia luogo la congruenza:

$$(r + s\omega)^k \equiv 1 \pmod{P},$$

[essendo P un ideale primo di 2° grado, cioè un ideale principale (p)], è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le seguenti congruenze:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^k + \binom{k}{2} r^{k-2} s^2 m + \dots + \binom{k}{k-1} r s^{k-1} m^{\frac{k-1}{2}} \equiv 1 \\ \binom{k}{1} r^{k-1} s + \binom{k}{3} r^{k-3} s^3 m + \dots + s^k m^{\frac{k-1}{2}} \equiv 0 \end{array} \right. \pmod{p}$$

Supposto $s \neq 0$, mutiamo le r, s nelle incognite y, s' , in modo che sia

$$r \equiv sy, \quad s^k s' \equiv 1 \pmod{p}.$$

Le (7) diventano

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} y^k + \binom{k}{2} m y^{k-2} + \dots + \binom{k}{k-1} m^{\frac{k-1}{2}} y \equiv s' \\ \left(\binom{k}{1} y^{k-1} + \binom{k}{3} m y^{k-3} + \dots + m^{\frac{k-1}{2}} \right) \equiv 0 \end{array} \right. \pmod{p}.$$

Poichè la (6) ammette, oltre alla soluzione 1, $k-1$ soluzioni della forma $r + s\omega$, con $r \neq 0$, la seconda di queste congruenze deve ammettere $k-1$ radici.

Di questo fatto si può dare una dimostrazione diretta nel seguente modo. Siano

$$1, \quad r_1 + s_1 \omega, \quad r_2 + s_2 \omega, \quad \dots, \quad r_{k-1} + s_{k-1} \omega$$

le soluzioni della congruenza

$$x^k \equiv 1 \pmod{P},$$

essendo k , divisore di $p^2 - 1$, primo con $p - 1$.

Se si denotano con σ_i e σ_j i numeri associati \pmod{p} rispettivamente di s_i e di s_j , si avrà sempre (essendo i diverso da j):

$$r_i \sigma_i \not\equiv r_j \sigma_j \pmod{p} \quad (i, j = 1, 2, \dots, k-1).$$

Infatti dalla prima delle (7), moltiplicando ambo i membri una volta per σ_i^k e un'altra per σ_j^k , dopo di avere sostituito alle r, s prima le r_i, s_i e poi le r_j, s_j , si ha:

$$\left. \begin{array}{l} (r_i \sigma_i)^k + \binom{k}{2} (r_i \sigma_i)^{k-2} m + \dots + \binom{k}{k-1} (r_i \sigma_i) m^{\frac{k-1}{2}} \equiv \sigma_i^k \\ (r_j \sigma_j)^k + \binom{k}{2} (r_j \sigma_j)^{k-2} m + \dots + \binom{k}{k-1} (r_j \sigma_j) m^{\frac{k-1}{2}} \equiv \sigma_j^k \end{array} \right\} \pmod{p}$$

Se fosse

$$r_i \sigma_i \equiv r_j \sigma_j \pmod{p},$$

si avrebbe

$$\sigma_i^k \equiv \sigma_j^k \pmod{p},$$

ovvero, essendo k primo con $p - 1$:

$$\sigma_i \equiv \sigma_j \pmod{p},$$

cioè

$$r_i \equiv r_j \pmod{p},$$

donde seguirebbe

$$r_i + s_i \omega \equiv r_j + s_j \omega \pmod{P},$$

ciò che è assurdo.

Segue che se si pone

$$y_i \equiv r_i \sigma_i \pmod{p},$$

i $k - 1$ numeri incongrui y_1, y_2, \dots, y_{k-1} soddisfaranno alla seconda delle (8), la quale ammette perciò $k - 1$ radici.

Se ciascuna di queste radici si sostituisce nella prima delle (8), si avranno, per s' , $k - 1$ valori corrispondenti

$$s'_1, s'_2, \dots, s'_{k-1}$$

che, sostituiti ogni volta alla s' , nella congruenza

$$s' s^k \equiv 1 \pmod{p}$$

(soddisfatta da una sola soluzione in s , essendo k primo con $p - 1$), ci forniranno $k - 1$ valori corrispondenti di s :

$$s_1, s_2, \dots, s_{k-1}.$$

Se nel secondo membro della congruenza

$$r \equiv s y \pmod{p}$$

si pone, invece di $s y$, ciascuno dei $k - 1$ prodotti

$$s_1 y_1, s_2 y_2, \dots, s_{k-1} y_{k-1}$$

si avranno $k - 1$ valori di r .

Se infine alle $k - 1$ coppie di soluzioni per le r, s così ottenute, si aggiunge l'altra

$$r = 1, s = 0,$$

si avrà un sistema completo di soluzioni della (6).

La questione è perciò ridotta alla risoluzione della seconda delle congruenze (8), i cui coefficienti sono numeri noti.

Se invece

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{m}}{2},$$

le potenze di ω si possono evidentemente mettere sotto la forma

$$a + b\omega,$$

essendo a e b interi razionali:

$$\omega^2 = \frac{m-1}{2^2} + \omega,$$

$$\omega^3 = \frac{m-1}{2^2} + \frac{m+3}{2^2} \omega,$$

$$\omega^4 = \frac{(m-1)(m+3)}{2^4} + \frac{m+1}{2} \omega,$$

$$\omega^5 = \frac{m^2-1}{2^3} + \frac{m^2+10m+5}{2^4} \omega,$$

.....

Si noti che ω^{2^h} è della forma $a + b\omega$, essendo a una funzione razionale intera nella m di grado h e b un'altra funzione razionale intera nella m di grado $h-1$; $\omega^{2^{h+1}}$ è pure della forma $a + b\omega$, ma a e b sono entrambe di grado h nella m . Ciò si può verificare facilmente tenendo presente che si ha:

$$m \equiv 1 \pmod{4}.$$

Se ci proponiamo di risolvere la (6), cioè di trovare r ed s tali che sia

$$(r + s\omega)^k \equiv 1 \pmod{P},$$

ovvero

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^k + \binom{k}{1} r^{k-1} s \omega + \binom{k}{2} r^{k-2} s^2 \omega^2 + \dots \\ \dots + \binom{k}{k-1} r s^{k-1} \omega^{k-1} + s^k \omega^k \equiv 1 \pmod{P}, \end{array} \right.$$

potremo porre:

$$\omega^h = \lambda_h + \mu_h \omega \quad (h = 2, 3, \dots, k),$$

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv s y \\ s^k s' \equiv 1 \end{array} \right\} \pmod{p},$$

e allora la (9) si scinde nelle due congruenze:

$$\left. \begin{array}{l} y^k + \binom{k}{2} \lambda_2 y^{k-2} + \binom{k}{3} \lambda_3 y^{k-3} + \dots + \binom{k}{k-1} \lambda_{k-1} y + \lambda_k \equiv s' \\ \binom{k}{1} y^{k-1} + \binom{k}{2} \mu_2 y^{k-2} + \binom{k}{3} \mu_3 y^{k-3} + \dots + \binom{k}{k-1} \mu_{k-1} y + \mu_k \equiv 0 \end{array} \right\} \pmod{p}$$

la seconda delle quali contiene la sola y .

Si ha perciò che la questione di determinare le soluzioni della (6) dipende dalla risoluzione della seconda delle congruenze precedenti, i cui coefficienti, come nel caso avanti studiato, sono noti e le cui soluzioni debbono perciò, nel corpo razionale, ritenersi note. Queste soluzioni sono in numero di $k-1$ perchè la (6), essendo k divi-

sore di $p^2 - 1$, ammette k soluzioni, delle quali una sola, essendo k primo con $p - 1$, è intera razionale e congrua ad 1, e le altre $k - 1$ sono numeri interi del corpo.

6. Consideriamo infine le congruenze binomie della forma

$$(10) \quad x^b \equiv b \pmod{P},$$

essendo b divisore di $p - 1$, e b residuo b^{mo} di P .

Pel teorema del n. 3, e tenendo conto dell'osservazione fatta al principio del n. 2, si può determinare una soluzione (apiristica), che chiameremo x_0 , della (10). Indicando con

$$1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{b-1}$$

le soluzioni della congruenza

$$x^b \equiv 1 \pmod{p},$$

i numeri

$$x_0, \gamma_1 x_0, \gamma_2 x_0, \dots, \gamma_{b-1} x_0$$

costituiscono un sistema completo di soluzioni della (10).

Evidentemente si perviene allo stesso risultato se, in un modo qualsiasi, invece di x_0 , si riesce a determinare una soluzione qualunque della (10).

7. Da quanto è stato detto nei n. 3, 4, 5 e 6 segue che la determinazione di un sistema completo di n^{mo} grado \pmod{P} si può rimandare alla risoluzione, nel corpo razionale, di congruenze, aventi per modulo p , i cui coefficienti sono numeri noti. Determinato un tale sistema

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{\frac{p^2-1}{n}},$$

posto

$$A_k \equiv -n(\rho_1^{nk-1} + \rho_2^{nk-1} + \dots + \rho_{\frac{p^2-1}{n}}^{nk-1}) \pmod{P},$$

per $k = 0, 1, 2, \dots, \frac{p^2-1}{n} - 1$, il polinomio

$$A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \dots + A_{\frac{p^2-1}{n}-1} a^{\frac{p^2-1}{n}-1}$$

è una soluzione apiristica della (1), nell'ipotesi che sia soddisfatta la (2).

Sicchè possiamo concludere che:

La risoluzione apiristica, in un corpo quadratico, della congruenza

$$x^n \equiv a \pmod{P},$$

essendo a un residuo n^{ico} di P , e P un ideale primo di 2° grado, si può ottenere mediante la risoluzione, nel corpo razionale, di congruenze, aventi per modulo p , i cui coefficienti sono numeri noti.

8. Nel corpo razionale i numeri

$$1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}$$

formano un sistema completo di 2° grado, qualunque sia il numero primo dispari p .

Ciò risulta dal fatto che le soluzioni della congruenza

$$x^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

sono indipendenti da p , perchè congrue \pmod{p} alle radici 1 e -1 dell'equazione binomia

$$x^2 = 1.$$

In quali corpi quadratici si ha un fatto analogo, cioè le n radici n^{me} dell'unità sono interi del corpo e costituiscono un sistema completo di n soluzioni della congruenza

$$x^n \equiv 1 \pmod{P},$$

supposto n divisore di $p^2 - 1$?

Questa ricerca è interessante perchè per tali corpi sarà subito determinabile, qualunque sia P , un sistema completo di n^{imo} grado.

Cominciamo coll'osservare, come conseguenza della proprietà sopra indicata della congruenza

$$x^2 \equiv 1 \pmod{P},$$

che, in qualunque corpo quadratico, supposto p primo dispari, i numeri

$$\omega, \quad 2\omega, \quad 3\omega, \quad \dots, \quad \frac{p-1}{2}\omega$$

$$p + \sigma\omega \quad \left(\begin{array}{l} p = 1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2} \\ \sigma = 0, 1, 2, \dots, p-1 \end{array} \right)$$

formano, qualunque sia P , un sistema completo di 2° grado.

Ora se m è positivo, non si hanno altri casi oltre quest'ultimo considerato ($n = 2$). Infatti, un intero del corpo $k(\sqrt{m})$, messo sotto la forma

$$a + b\sqrt{m} \quad [m \not\equiv 1 \pmod{4}],$$

ovvero sotto l'altra

$$a + b\frac{1 + \sqrt{m}}{2} \quad [m \equiv 1 \pmod{4}],$$

è sempre, per l'ipotesi fatta su m , un numero reale e quindi non può fornire, in ambo i casi (facendo: $b = 0$, $a = \pm 1$), che le due radici quadrate dell'unità. Se si vuole che queste due radici costituiscano un sistema completo di soluzioni, essendo p primo dispari, si deve avere perciò:

$$n = 2.$$

Supponiamo m negativo e tale che sia

$$m \not\equiv 1 \pmod{4}.$$

Perchè $a + ib\sqrt{-m}$, essendo a e b interi razionali, dia luogo, per valori interi razionali di a e b , alle n radici n^{ime} dell'unità, per $n > 2$, dovrà essere soddisfatta la condizione

$$a^2 - b^2 m = 1;$$

quindi è necessario che sia in primo luogo:

$$m = -1,$$

e poi:

$$a = 0 \quad e \quad b = 1, \quad \text{ovvero} \quad b = -1,$$

oppure:

$$b = 0 \quad e \quad a = 1, \quad \text{ovvero} \quad a = -1.$$

Si hanno in corrispondenza gl'interi

$$i, -i, 1, -1$$

del corpo $k(i)$. In questo caso è dunque

$$n = 4.$$

Sia m ancora negativo, ma tale che sia

$$m \equiv 1 \pmod{4}.$$

Perchè $a + b \frac{1 + i\sqrt{-m}}{2}$ fornisca, per valori interi razionali di a e b , le n radici m^{me} dell'unità, per $n > 2$, dovrà essere soddisfatta la condizione

$$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 m}{4} = 1;$$

ciò che da in primo luogo

$$m = -3.$$

Si traggono poi i seguenti sei casi possibili:

$$b = 0 \begin{cases} a = 1, \\ a = -1, \end{cases} \quad b = 1 \begin{cases} a = 0, \\ a = -1, \end{cases} \quad b = -1 \begin{cases} a = 0, \\ a = 1, \end{cases}$$

ai quali corrispondono gl'interi del corpo $k(\sqrt{-3})$:

$$1, -1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Il numero n può avere in questo caso il valore 3 o 6.

Riassumendo si ha:

La congruenza

$$x^n \equiv 1 \pmod{P},$$

essendo P un ideale primo di 2° grado di norma p^2 nel corpo quadratico $k(\sqrt{m})$, ammette un sistema completo di soluzioni costituito dalle n radici n^{me} dell'unità, soltanto nei casi seguenti:

- a) $n = 2$, in qualsiasi corpo quadratico,
- b) $n = 4$, nel corpo quadratico $k(\sqrt{-1})$,
- c) $n = 3$, ovvero $n = 6$, nel corpo quadratico $k(\sqrt{-3})$.

Nel caso b), se si forma il quadro nel modo indicato nel n. 3, si ha facilmente che i numeri interi razionali

$$1, 2, \dots, \frac{p-1}{2},$$

e gl'interi del corpo

$$\begin{aligned}
 &1 + i, \quad 1 + 2i, \quad 1 + 3i, \dots, \quad 1 + (p-4)i, \quad 1 + (p-3)i, \quad 1 + (p-2)i, \\
 &\quad 2 + 2i, \quad 2 + 3i, \dots, \quad 2 + (p-4)i, \quad 2 + (p-3)i, \\
 &\quad 3 + 3i, \dots, \quad 3 + (p-4)i, \\
 &\quad \dots \dots \dots \\
 &\quad \frac{p-1}{2} + \frac{p-1}{2}i
 \end{aligned}$$

formano un sistema completo di 4° grado, qualunque sia l'ideale primo P di 2° grado, nel corpo quadratico $k(\sqrt{-1})$. All'ideale P si può sostituire, com'è noto, in questo corpo, il numero razionale primo p , che sarà della forma $4x + 3$, dovendo il discriminante -4 del corpo essere non residuo di p .

Anche nel caso c) la nozione di ideale non è necessaria. A P si può quindi sostituire il numero primo p , il quale dovrà essere della forma $6x - 1$ perchè il discriminante -3 del corpo risulti non residuo di p .

Ciò posto, formando il quadro al solito modo, si ha che i numeri interi razionali

$$1, \quad 2, \quad 3, \dots, \quad \frac{p-1}{2}$$

e gl'interi del corpo

$$\begin{aligned}
 &1 + \omega, \quad 1 + 2\omega, \quad 1 + 3\omega, \dots, \quad 1 + (p-5)\omega, \quad 1 + (p-4)\omega, \quad 1 + (p-3)\omega, \\
 &\quad 2 + 2\omega, \quad 2 + 3\omega, \dots, \quad 2 + (p-6)\omega, \quad 2 + (p-5)\omega, \\
 &\quad 3 + 3\omega, \dots, \quad 3 + (p-7)\omega, \\
 &\quad \dots \dots \dots \\
 &\quad \frac{p-2}{3}(1 + \omega), \quad \frac{p-2}{3} + \frac{p+1}{3}\omega,
 \end{aligned}$$

formano, per

$$\omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

un sistema completo di 6° grado, qualunque sia p , nel corpo quadratico $k(\sqrt{-3})$.

Un sistema completo di 3° grado, nel corpo quadratico $k(\sqrt{-3})$, si può evidentemente formare aggiungendo a tutti i numeri $\rho + \sigma\omega$ di un sistema completo di 6° grado i loro opposti $-\rho - \sigma\omega$.

Catania, 4 luglio 1916.

VINCENZO AMATO.

SULLA SOMMABILITÀ DELLE SERIE, CON PARTICOLARE RIGUARDO ALLE SERIE DI DIRICHLET.

Nota di **Pia Nalli** (Palermo).

Adunanza del 23 luglio 1916.

È noto che, sotto certe condizioni, la somma di una serie divergente viene definita come il limite al quale tende una media delle somme parziali della serie, dipendente da un parametro continuo o discontinuo, quando questo parametro tende ad un limite finito od infinito.

Data la serie

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots,$$

e, posto

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

una forma generale di media tra i numeri $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, è la seguente

$$(2) \quad \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n s_n}{\sum_{n=1}^{\infty} p_n},$$

dove le p_n sono numeri reali non negativi tali che le due serie che si presentano nella (2) siano convergenti ¹⁾.

Tra le medie della forma (2) sono notevoli le *medie tipiche di RIESZ* ²⁾.

Data una successione di numeri non negativi, crescente ed illimitata:

$$(3) \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots,$$

ed un numero positivo α , si chiama media tipica di ordine α , relativa alla successione (3), per la serie (1), l'espressione

$$\sigma(y) = \frac{u_1(y - \lambda_1)^\alpha + u_2(y - \lambda_2)^\alpha + \dots + u_{i_y}(y - \lambda_{i_y})^\alpha}{y^\alpha},$$

¹⁾ Cfr. p. es: E. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes* (Paris, Gauthier-Villars, 1901), pp. 87-96.

²⁾ M. RIESZ, *Sur la sommation des séries de DIRICHLET* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), tome CXLIX (II^e semestre 1909), pp. 18-21].

dove i_y è un intero positivo tale che si ha

$$\lambda_{i_y} \leq y < \lambda_{i_y+1}.$$

Questa media dipende dal parametro continuo y e si può mettere sotto un'altra forma la quale mostra come essa rientri nella forma (2).

Posto

$$U(y) = \sum_{\lambda_n \leq y} u_n,$$

si à

$$\sigma(y) = \frac{\alpha}{y^\alpha} \int_0^y U(x)(y-x)^{\alpha-1} dx.$$

Si dice che la (1) è sommabile di ordine α se esiste il limite di $\sigma(y)$ per $y = \infty$.

Il RIESZ ha utilizzato le sue medie per lo studio delle serie di DIRICHLET della forma

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}.$$

In particolare, se è $\lambda_n = n$, il metodo sommatorio di RIESZ diventa equivalente al metodo delle medie aritmetiche di CESÀRO ³⁾.

In un recente lavoro ⁴⁾ ho accennato ad un metodo sommatorio che si può considerare come una generalizzazione di quello di RIESZ.

Data una funzione $g(y)$ positiva, definita per $y \geq 0$, e tale che la funzione

$$g(1, y) = \int_0^y g(x) dx$$

sia illimitata, per $\alpha > 0$ si ponga

$$g(\alpha, y) = \int_0^y g(x)(y-x)^{\alpha-1} dx.$$

Si dirà che la (1) è sommabile di ordine α , rispetto alla funzione $g(y)$, se esiste il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$(5) \quad \frac{1}{g(\alpha, y)} \int_0^y U(x) g(x)(y-x)^{\alpha-1} dx.$$

Nella presente Nota mi occupo dello studio di questo metodo sommatorio per la funzione $g(x) = e^{cx}$, supponendo, con maggiore generalità, che c sia reale o complesso ed abbia parte reale positiva: la (5) è allora una media che rientra nella forma (2), supponendo che in questa le p_n possano anche essere dei numeri complessi.

³⁾ M. RIESZ, *Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), tome CLII (1^{er} semestre 1911), pp. 1651-1654].

⁴⁾ P. NALLI, *Sulle serie di DIRICHLET* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XL (2^o semestre 1915), pp. 44-70], pp. 57-58.

Ponendo nella (5) $g(x) = e^{cx}$, condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione di y che si ottiene tenda ad un limite per $y = \infty$ è che esista il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$(6) \quad N(c, \alpha, y) = \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y U(x)(y-x)^{\alpha-1} e^{-c(y-x)} dx.$$

Nella presente Nota dimostro che, fissato c , se esiste il limite per $y = \infty$ di $N(c, \alpha', y)$ per un particolare valore $\alpha' > 0$, esiste il limite di $N(c, \alpha, y)$ per qualunque valore $\alpha > \alpha'$; e, fissato α , se esiste il limite di $N(c', \alpha, y)$ per un particolare valore c' avente parte reale positiva, esiste il limite di $N(c, \alpha, y)$ per qualunque valore di c avente parte reale positiva.

Dimostro ancora che il limite di $N(c, \alpha, y)$ non dipende nè da α nè da c .

Ho delle ragioni per ritenere, quantunque non sia ancora riuscita a superare le difficoltà puramente materiali della dimostrazione, che perchè esista il limite di $N(c, \alpha, y)$ è necessario e sufficiente che la (1) sia sommabile per mezzo della media tipica di RIESZ di ordine α e relativa alla successione

$$e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}, \dots$$

Ritengo però che il definire la somma della (1) come il limite di $N(c, \alpha, y)$ per $y = \infty$, possa presentare dei vantaggi, rispetto al metodo sommatorio di RIESZ, per lo studio delle serie di DIRICHLET della forma (4). Così, al n° 3, dimostro che, posto nella (6) $u_n = a_n e^{-\lambda_n s}$, si ha, per $\alpha \geq 1$,

$$(7) \quad N(s - s_0, \alpha, y) = \frac{(s - s_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y A(\alpha - 1, u; s_0) u^{\alpha-1} e^{-(s-s_0)u} du,$$

essendo s ed s_0 due numeri complessi qualunque diversi, ed

$$A(\alpha - 1, u; s_0) = \frac{\alpha - 1}{u^{\alpha-1}} \int_0^u \left(\sum_{\lambda_n \leq x} a_n e^{-\lambda_n s_0} \right) (u-x)^{\alpha-2} dx,$$

[cioè $A(\alpha - 1, u; s_0)$ è la media tipica di RIESZ di ordine $\alpha - 1$ relativa alla successione (3) e corrispondente alla serie che ha per termine generale $a_n e^{-\lambda_n s_0}$].

La (7) permette di dedurre immediatamente dai due già enunciati, altri due teoremi relativi alle serie di DIRICHLET.

Nei n° 5, 6 e 7 della presente Nota mostro che un metodo sommatorio da me definito nella Memoria già citata si può fare rientrare nella forma generale di media data dalla (2), ed arrivo ad un metodo sommatorio che può applicarsi alla serie (1) quando per essa esiste il limite di $N(c, \alpha, y)$ per $y = \infty$, per un particolare valore di α , qualunque questo sia.

1. Data la serie (1), la successione (3) ed un numero c avente parte reale positiva, si definisca $N(c, \alpha, y)$ per mezzo della (6).

Si può facilmente dimostrare che se la (1) è convergente, cioè se esiste il limite di $U(y)$ per $y = \infty$, a questo limite tende $N(c, \alpha, y)$ quando y tende ad ∞ .

Sia β un numero positivo; dimostreremo la seguente relazione:

$$(8) \quad N(c, \alpha + \beta, y) = \frac{c^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^y N(c, \alpha, x) (y-x)^{\beta-1} e^{-c(y-x)} dx.$$

Supponiamo dapprima che α non sia un numero intero e denotiamo con r la parte intera di $\alpha - 1$ ($r \geq -1$). Poniamo

$$(9) \quad h = 2 + r - \alpha;$$

sarà h un numero positivo minore di 1.

Dalla (6), con successive derivazioni a destra, si avrà

$$\frac{d^{r+1} [N(c, \alpha, y) e^{cy}]}{dy^{r+1}} = \frac{c^\alpha}{\Gamma(1-h)} \int_0^y \frac{U(x) e^{cx}}{(y-x)^h} dx.$$

Da questa, per una nota formola d'inversione di ABEL, si trae

$$(10) \quad U(y) e^{cy} = \frac{\Gamma(1-h)}{c^\alpha} \cdot \frac{\sin \pi h}{\pi} \int_0^y \frac{d^{r+2} [N(c, \alpha, x) e^{cx}]}{dx^{r+2}} (y-x)^{h-1} dx,$$

e perciò, ricordando l'identità

$$\Gamma(h) \Gamma(1-h) = \frac{\pi}{\sin \pi h},$$

avremo

$$c^\alpha U(y) e^{cy} = \frac{1}{\Gamma(h)} \int_0^y \frac{d^{r+2} [N(c, \alpha, x) e^{cx}]}{dx^{r+2}} (y-x)^{h-1} dx.$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} N(c, \alpha + \beta, y) &= \frac{c^\beta}{\Gamma(h) \Gamma(\alpha + \beta)} e^{-cy} \int_0^y (y-x)^{\alpha+\beta-1} dx \times \\ &\times \int_0^x \frac{d^{r+2} [N(c, \alpha, t) e^{ct}]}{dt^{r+2}} (x-t)^{h-1} dt, \end{aligned}$$

ed applicando al secondo membro la formola d'inversione di DIRICHLET, si ottiene

$$\begin{aligned} N(c, \alpha + \beta, y) &= \frac{c^\beta}{\Gamma(h) \Gamma(\alpha + \beta)} e^{-cy} \int_0^y \frac{d^{r+2} [N(c, \alpha, t) e^{ct}]}{dt^{r+2}} dt \times \\ &\times \int_t^y (y-x)^{\alpha+\beta-1} (x-t)^{h-1} dx. \end{aligned}$$

Si ha intanto

$$\int_t^y (y-x)^{\alpha+\beta-1} (x-t)^{h-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(h)}{\Gamma(\alpha + \beta + h)} (y-t)^{\alpha+\beta+h-1},$$

quindi, tenendo conto della (9), possiamo scrivere

$$N(c, \alpha + \beta, y) = \frac{c^\beta}{\Gamma(r + \beta + 2)} e^{-cy} \int_0^y \frac{d^{r+2} [N(c, \alpha, t) e^{ct}]}{dt^{r+2}} (y-t)^{r+\beta+1} dt.$$

Da questa, con $r+2$ successive integrazioni per parti, si ottiene la (8).

Se α è un numero intero la (8) si dimostra più facilmente. Posto in tale caso $r = \alpha - 1$, invece della (10) si avrà

$$U(y)e^{cy} = \frac{1}{c^\alpha} \cdot \frac{d^{r+1}[N(c, \alpha, y)e^{cy}]}{dy^{r+1}}.$$

Il secondo membro della (8) ha la stessa forma del secondo membro della (6), quindi se $N(c, \alpha, y)$ tende ad un limite per $y = \infty$, allo stesso limite tende $N(c, \alpha + \beta, y)$ per qualunque $\beta > 0$.

2. Dimostriamo ora che, fissato α , se esiste il limite di $N(c_i, \alpha, y)$ per un particolare c_i avente parte reale positiva, esisterà il limite di $N(c, \alpha, y)$ per qualunque valore di c avente parte reale positiva. Inoltre, tale limite sarà indipendente da c .

Cominciamo col dimostrare il teorema per i valori di c soddisfacenti alla condizione

$$(11) \quad |c - c_i| < g_i,$$

dove g_i denota la parte reale di c_i .

Si ha allora

$$\begin{aligned} N(c, \alpha, y) &= \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y U(x)(y-x)^{\alpha-1} e^{-c_1(y-x)} e^{(c_1-c)(y-x)} dx = \\ &= \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c_1 - c)^n}{\Gamma(n+1)} \int_0^y U(x)(y-x)^{\alpha+n-1} e^{-c_1(y-x)} dx, \end{aligned}$$

che si può scrivere

$$(12) \quad N(c, \alpha, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{c}{c_1} \right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n+1)} \left(1 - \frac{c}{c_1} \right)^n N(c_1, \alpha+n, y).$$

È facile vedere che la serie che compare nel secondo membro di questa eguaglianza converge uniformemente rispetto ad y , variabile nell'intervallo $(0, \infty)$.

Infatti, se con L denotiamo una costante tale da avere

$$|N(c_1, \alpha, y)| < L$$

per qualunque y , deduciamo dalla (8)

$$\begin{aligned} |N(c_1, \alpha+n, y)| &< L |c_1|^n \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^y (y-x)^{n-1} e^{-g_1(y-x)} dx < \\ &< L |c_1|^n \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty u^{n-1} e^{-g_1 u} du = L \frac{|c_1|^n}{g_1^n}, \end{aligned}$$

quindi, per qualunque valore di y , il termine generale della serie che consideriamo non supera

$$\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{|c_1 - c|^n}{g_1^n}$$

che, per la (11), è il termine generale di una serie convergente.

Essendo

$$\lim_{y \rightarrow \infty} N(c_1, \alpha+n, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} N(c_1, \alpha, y),$$

per l'uniforme convergenza del secondo membro della (12), avremo

$$\lim_{y=\infty} N(c, z, y) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{c}{c_1} \right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(n+1)} \left(1 - \frac{c}{c_1} \right)^n \right] \lim_{y=\infty} N(c_1, z, y)$$

Ma si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)} \left(1 - \frac{c}{c_1} \right)^n = \left[1 - \left(1 - \frac{c}{c_1} \right) \right]^{-\alpha} = \left(\frac{c}{c_1} \right)^{-\alpha},$$

si conclude dunque finalmente

$$(13) \quad \lim_{y=\infty} N(c, z, y) = \lim_{y=\infty} N(c_1, z, y).$$

Il teorema resta così dimostrato quando c soddisfa alla (11).

Se poi c non soddisfa alla (11), possiamo inserire tra c_1 e c altre costanti in numero finito: c_2, c_3, \dots, c_{n-1} , aventi parti reali positive e tali che per due consecutive, c_i, c_{i+1} , si abbia

$$|c_{i+1} - c_i| < g_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) (c_n = c),$$

dove g_i denota la parte reale di c_i . Si può dunque asserire che se $N(c_i, z, y)$ tende ad un limite per $y = \infty$, allo stesso limite tenderà $N(c_{i+1}, z, y)$, e perciò, se esiste il limite di $N(c_1, z, y)$ è soddisfatta la (13). Il teorema resta così dimostrato in ogni caso.

3. Ai teoremi dimostrati si può dare altra forma: si hanno allora due teoremi relativi alle serie di DIRICHLET.

Sia la serie di DIRICHLET

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

dove la successione delle λ_n è la (3), s è una variabile complessa della quale denotiamo con σ la parte reale e con t il coefficiente dell'unità immaginaria.

Sia $s_0 = \sigma_0 + it_0$ un particolare valore della variabile complessa s . Si ponga per $y \geq 0$

$$(15) \quad S(y; s_0) = \sum_{\lambda_n \leq y} a_n e^{-\lambda_n s_0},$$

e, supposto α reale e positivo,

$$(16) \quad A(\alpha, y; s_0) = \frac{\alpha}{y^\alpha} \int_0^y S(u; s_0) (y-u)^{\alpha-1} du$$

per $y > 0$, ed $A(\alpha, 0; s_0) = S(0; s_0)$.

Posto

$$(17) \quad T(y) = \sum_{\lambda_n \leq y} a_n e^{-\lambda_n s},$$

dimostriamo la seguente relazione

$$(18) \quad \int_0^y A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du = \int_0^y T(x) (y-x)^\alpha e^{-(s-s_0)(y-x)} dx.$$

Si ha, per la (16),

$$\int_0^y A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du = \alpha \int_0^y e^{-(s-s_0)u} du \int_0^u S(v; s_0) (u-v)^{\alpha-1} dv,$$

ed applicando la formola d'inversione di DIRICHLET

$$\int_0^y A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du = \alpha \int_0^y S(v; s_0) dv \int_v^y e^{-(s-s_0)u} (u-v)^{\alpha-1} du.$$

Cambiando la variabile u in una variabile x per mezzo della trasformazione $u-v=x$, si avrà

$$\int_0^y A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du = \alpha \int_0^y S(v; s_0) e^{-(s-s_0)v} dv \int_0^{y-v} e^{-(s-s_0)x} x^{\alpha-1} dx.$$

Integrando per parti rispetto a v si ottiene

$$\int_0^y A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du = \alpha \int_0^y e^{-(s-s_0)(y-v)} (y-v)^{\alpha-1} dv \int_0^v S(u; s_0) e^{-(s-s_0)u} du.$$

Intanto, tenendo conto della (17), si ha

$$S(u) = -(s-s_0) \int_0^u T(x) e^{(s-s_0)x} dx + T(u) e^{(s-s_0)u},$$

e perciò

$$\int_0^{y-v} S(u) e^{-(s-s_0)u} du = -(s-s_0) \int_0^{y-v} du \int_0^u T(x) e^{-(s-s_0)(u-x)} dx + \int_0^{y-v} T(u) du.$$

Applicando al primo termine del secondo membro la formola d'inversione di DIRICHLET si trova facilmente.

$$\int_0^v S(u) e^{-(s-s_0)u} du = e^{-(s-s_0)v} \int_0^v T(x) e^{(s-s_0)x} dx,$$

e perciò

$$\int_0^y A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du = \alpha e^{-(s-s_0)y} \int_0^y (y-v)^{\alpha-1} dv \int_0^v T(x) e^{(s-s_0)x} dx.$$

Applicando ancora una volta la formola d'inversione si ottiene la (18). Da essa può ricavarsi la (7).

Possiamo dunque dire che *condizione necessaria e sufficiente affinchè esista il limite, per $y = \infty$, del secondo membro della (18), è che esista l'integrale*

$$\int_0^\infty A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du.$$

Al teorema dimostrato al n° 2 si può dunque dare la seguente forma:

Se per due punti $s = \sigma + it$ ed $s_0 = \sigma_0 + it_0$, con $\sigma_0 < \sigma$, esiste l'integrale $\int_0^\infty A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du$, esisterà l'integrale $\int_0^\infty A(\alpha, u; s_1) u^\alpha e^{-(s-s_1)u} du$ per qua-

lunque punto $s_1 = \sigma_1 + it_1$ soddisfacente alla condizione $\sigma_1 < \sigma$, e sussisterà l'uguaglianza

$$(s - s_0)^{\alpha+1} \int_0^\infty A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du = (s - s_1)^{\alpha+1} \int_0^\infty A(\alpha, u; s_1) u^\alpha e^{-(s-s_1)u} du.$$

4. Si dimostra ⁵⁾ che se esiste l'integrale $\int_0^\infty A(\alpha - 1, u; s_0) u^{\alpha-1} e^{-(s-s_0)u} du$ ed inoltre è $\sigma > \sigma_0$, esiste anche il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$(19) \quad \frac{\alpha}{y^\alpha} \int_0^y T(u)(y-u)^{\alpha-1} du,$$

e cioè, riprendendo le notazioni dell'introduzione, se esiste il limite di $N(c, \alpha, y)$ per $y = \infty$ [e per ciò è necessario e sufficiente che esista il limite di $N(1, \alpha, y)$] esisterà, e sarà ad esso eguale, il limite, per $y = \infty$, dell'espressione

$$\frac{\alpha}{y^\alpha} \int_0^y U(x)(y-x)^{\alpha-1} dx,$$

cioè la (1) sarà sommabile di ordine α secondo RIESZ.

Ciò potrebbe anche dimostrarsi direttamente.

Nella Memoria citata ho dimostrato ancora che se esiste l'integrale

$$\int_0^\infty A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du$$

ed è $\sigma > \sigma_0$, esiste anche l'integrale

$$\int_0^\infty A(\alpha', u; s_0) u^{\alpha'} e^{-(s-s_0)u} du$$

per qualunque $\alpha' > \alpha$, e si ha

$$\frac{(s - s_0)^{\alpha'+1}}{\Gamma(\alpha' + 1)} \int_0^\infty A(\alpha', u; s_0) u^{\alpha'} e^{-(s-s_0)u} du = \frac{(s - s_0)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du.$$

Questo teorema è equivalente a quello enunciato alla fine del n° 1.

Si osservi ancora che nella Memoria già citata ho dimostrato che se in ogni punto s del semipiano $\sigma > \beta$ la (19) tende ad un limite per $y = \infty$, se s_0 è un punto per il quale si ha $\sigma_0 \leq \beta$, si avrà nel semipiano $\sigma > \beta$

$$\lim_{y=\infty} \frac{\alpha + 1}{y^{\alpha+1}} \int_0^y T(u)(y-u)^\alpha du = \frac{(s - s_0)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty A(\alpha, v; s_0) v^\alpha e^{-(s-s_0)v} dv,$$

e perciò

$$\lim_{y=\infty} \frac{\alpha + 1}{y^{\alpha+1}} \int_0^y T(u)(y-u)^\alpha du = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \lim_{y=\infty} \int_0^y T(u)(y-u)^\alpha e^{-(y-u)} du.$$

Ne viene che il teorema enunciato alla fine del n° 3 era già implicitamente dimo-

⁵⁾ l. c. 4), pp. 49-52.

strato quando il punto s è interno al semipiano nel quale la (14) è sommabile dell'ordine $\alpha + 1$, secondo RIESZ: nella presente Nota esso viene dimostrato anche nel caso in cui l'ascissa del punto s coincide con l'ascissa di sommabilità di ordine $\alpha + 1$ della (14).

5. Nella Memoria citata ho dato un procedimento di calcolo che permette di sommare la (14) in ogni punto s di un semipiano $\sigma > \sigma_1$ quando, fissato comunque $\eta > 0$, nel semipiano $\sigma > \sigma_1 + \eta$ esiste l'integrale $\int_0^\infty A(\alpha, u; s_0) u^\alpha e^{-(s-s_0)u} du$ per un conveniente valore di α e per un punto s_0 del semipiano $\sigma \leq \sigma_1$.

La somma della (14) viene definita nel modo seguente.

Sia $\varphi(y)$ una funzione di y nell'intervallo $(0, +\infty)$, positiva, crescente ed illimitata, soddisfacente alla condizione

$$(20) \quad \varphi(y) = o\left(\frac{y}{\log y}\right).$$

Se s è un punto del semipiano $\sigma > \sigma_1$ ed esiste il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$(21) \quad \frac{(s - s_0)^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y) + 1)} \int_0^y A(\varphi(y), u; s_0) u^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)u} du,$$

tale limite si chiamerà la somma della (14) nel punto s .

È facile vedere che questo procedimento sommatorio può ricondursi al tipo di una media.

Operando come al n° 3 si dimostra la relazione

$$(22) \quad \int_0^y A(\varphi(y), u; s_0) u^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)u} du = \int_0^y T(x)(y-x)^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)(y-x)} dx.$$

Ora si à

$$(23) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\varphi(y) + 1)}{(s - s_0)^{\varphi(y)+1}} \frac{1}{\int_0^y (y-x)^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)(y-x)} dx} = 1.$$

Infatti, essendo

$$\frac{\Gamma(\varphi(y) + 1)}{(s - s_0)^{\varphi(y)+1}} = \int_0^\infty u^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)u} du,$$

la (23) resterà dimostrata se si dimostra che è

$$(24) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \int_y^\infty u^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)u} du = 0.$$

Ponendo $\sigma - \sigma_0 = \alpha_1 + \alpha_2$, con α_1 ed α_2 positivi, avremo

$$\left| \int_y^\infty u^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)u} du \right| \leq \int_y^\infty u^{\varphi(y)} e^{-\alpha_1 u} e^{-\alpha_2 u} du.$$

La funzione di u , $u^{\varphi(y)} e^{-\alpha_1 u}$, quando y è sufficientemente grande, è decrescente nell'intervallo $(y, +\infty)$, quindi sarà

$$\int_y^\infty u^{\varphi(y)} e^{-\alpha_1 u} e^{-\alpha_2 u} du < y^{\varphi(y)} e^{-\alpha_1 y} \int_y^\infty e^{-\alpha_2 u} du = \frac{1}{\alpha_2} e^y \left[\frac{\varphi(y) \log y}{y} - (\sigma - \tau_0) \right].$$

Per la (20) resta dunque dimostrata la (24).

Si può dunque dire che il limite per $y = \infty$ della (21) esiste quando e soltanto quando esiste il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$\frac{\int_0^y T(x) (y-x)^{\varphi(y)} e^{(s-s_0)x} dx}{\int_0^y (y-x)^{\varphi(y)} e^{(s-s_0)x} dx},$$

che, relativamente alla (14), ha la forma di una media dipendente dal parametro y .

6. Si arriva così ad un procedimento che può servire a definire la somma di una serie. Data la serie (1) ed un numero c avente parte reale positiva, si chiamerà somma della (1) il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$(25) \quad \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_0^y U(x) (y-x)^{\varphi(y)} e^{-c(y-x)} dx,$$

quando questo limite esiste.

Perchè questa definizione sia accettabile, si dovrebbe dimostrare che se la (1) converge, la (25) ha per limite la somma della serie. Si può dimostrare che ciò è vero quando c è reale.

Infatti, chiamando U la somma della (1), supposta convergente, fissato $\varepsilon > 0$ si determini h in modo che per $x \geq h$ sia $|U(x) - U| < \varepsilon$. Si avrà allora, se per qualunque x è

$$|U(x)| \leq \frac{M}{2},$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_0^y (U(x) - U) (y-x)^{\varphi(y)} e^{-c(y-x)} dx \right| \leq \\ & \leq M \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_0^h (y-x)^{\varphi(y)} e^{-c(y-x)} dx + \\ & + \varepsilon \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_h^y (y-x)^{\varphi(y)} e^{-c(y-x)} dx. \end{aligned} \right.$$

Il secondo termine del secondo membro di questa disuguaglianza non supera ε ; il primo termine non supera

$$Mh \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} y^{\varphi(y)} e^{-cy} e^{ch} = M h e^{ch} \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} e^y \left[\frac{\varphi(y) \log y}{y} - c \right],$$

e perciò, fissato h , tende a zero quando y tende ad ∞ . Il primo membro della (26)

tende dunque a zero quando y tende ad ∞ , ed essendo

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_0^y (y-x)^{\varphi(y)} e^{-c(y-x)} dx = 1,$$

si avrà

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_0^y U(x)(y-x)^{\varphi(y)} e^{-c(y-x)} dx = U.$$

7. Si può dimostrare che se esiste il limite di $N(c, \alpha + 1, y)$ per $y = \infty$ e c è reale, esiste anche il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$\frac{c^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_0^y U(x)(y-x)^{\varphi(y)} e^{-c(y-x)} dx$$

ed i due limiti sono eguali.

Ciò equivale a dimostrare che se esiste l'integrale $\int_0^\infty A(\alpha, u; s_0) e^{-(s-s_0)u} du$, ed $s - s_0$ è una quantità reale e positiva, esiste il limite per $y = \infty$ della (21) e questo limite è

$$\frac{(s-s_0)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty A(\alpha, u; s_0) e^{-(s-s_0)u} du.$$

Infatti, essendo

$$A(\varphi(y), u; s_0) u^{\varphi(y)} = \frac{\Gamma(\varphi(y)+1)}{\Gamma(\varphi(y)-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \times \\ \times \int_0^u A(\alpha, x; s_0)(u-x)^{\varphi(y)-\alpha-1} x^\alpha dx \quad ^6),$$

si avrà

$$(27) \left\{ \begin{aligned} & \frac{(s-s_0)^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)+1)} \int_0^y A(\varphi(y), u; s_0) u^{\varphi(y)} e^{-(s-s_0)u} du \\ & = \frac{(s-s_0)^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^y e^{-(s-s_0)u} du \int_0^u A(\alpha, x; s_0)(u-x)^{\varphi(y)-\alpha-1} x^\alpha dx. \end{aligned} \right.$$

Applicando al secondo membro la formola d'inversione di DIRICHLET e cambiando poi la variabile u nella variabile $v = u - x$, si trova che il secondo membro della (27) è uguale ad

$$(28) \frac{(s-s_0)^{\varphi(y)+1}}{\Gamma(\varphi(y)-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^y A(\alpha, x; s_0) x^\alpha e^{-(s-s_0)x} dx \int_0^{y-x} v^{\varphi(y)-\alpha-1} e^{-(s-s_0)v} dv.$$

Per semplicità poniamo

$$\int_0^y A(\alpha, x; s_0) x^\alpha e^{-(s-s_0)x} dx = f(y)$$

⁶⁾ l. c. 4), p. 49.

e

$$\varphi(y) - \alpha - 1 = \psi(y);$$

la (28), integrando per parti rispetto ad x , si può scrivere

$$\frac{(s - s_0)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \frac{(s - s_0)^{\psi(y)+1}}{\Gamma(\psi(y)+1)} \int_0^y f(x)(y-x)^{\psi(y)} e^{-(s-s_0)(y-x)} dx,$$

Ma per quando si è detto al n° precedente si ha

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(s - s_0)^{\psi(y)+1}}{\Gamma(\psi(y)+1)} \int_0^y f(x)(y-x)^{\psi(y)} e^{-(s-s_0)(y-x)} dx \\ = \lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = \int_0^\infty A(\alpha, x; s_0) x^\alpha e^{-(s-s_0)x} dx; \end{aligned}$$

il teorema resta così dimostrato

Palermo, marzo 1916.

PIA NALLI.

SU UNA CLASSE DI ALGORITMI DI ITERAZIONE PER L'APPROSSIMAZIONE DEGLI IRRAZIONALI QUADRATICI.

Memoria di **Onorato Nicoletti** (Pisa).

Adunanza del 9 luglio 1916.

1. È noto che, data in una forma geometrica di prima specie una proiettività (reale) non ellittica e non involutoria, ciascuno degli elementi uniti della proiettività può essere approssimato, iterando su un elemento qualunque della forma la proiettività data e la sua inversa.

Traducendo in formule questo fatto, si è condotti ad una classe di algoritmi di iterazione su una variabile complessa x , i quali approssimano razionalmente le radici di una equazione quadratica ed hanno la proprietà, molto notevole, di *convergere in tutto il piano della variabile complessa x* , fatta eccezione per i punti di una circonferenza determinata; per ciascuno di tali algoritmi è cioè noto il campo *vero* di convergenza. Di essi sono casi particolari: l'algoritmo di NEWTON

$$x' = \frac{x^2 + D}{2x}$$

e quello, dato dal DEDEKIND nella sua Memoria « *Stetigkeit und irrationalen Zahlen* »

$$x' = \frac{x^3 + 3Dx}{3x^2 + D}$$

per approssimare $\sqrt[3]{D}$, essendo D un numero reale e positivo.

2. Sia dunque:

$$(1) \quad f(\omega) = \omega^2 - 2p\omega + q = (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)$$

un trinomio di 2° grado in una variabile ω con radici ω_1, ω_2 diverse; ed essendo x_0 , x_t due numeri reali o complessi affatto arbitrari, poniamo, per t intero qualunque:

$$(2) \quad (x_t x_{t-1} \omega_1 \omega_2) = (x_t x_0 \omega_1 \omega_2), \quad (t = 0, 1, 2, \dots, -1, -2, -3, \dots)$$

essendo

$$(abcd) = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}.$$

Le (2) definiscono, per i valori interi e positivi di t , un algoritmo lineare Γ , il cui inverso Γ^{-1} si ha considerando i valori interi e negativi di t .

Per l'identità:

$$(a b \omega_1 \omega_2)(b c \omega_1 \omega_2) = (a c \omega_1 \omega_2),$$

dalla (2) si ha, per t qualunque:

$$(2_t) \quad (x_t x_0 \omega_1 \omega_2) = (x_t x_0 \omega_1 \omega_2)^t;$$

se quindi è

$$|(x_t x_0 \omega_1 \omega_2)| \neq 1$$

e, per fissare le idee, è, ad esempio:

$$(3') \quad |(x_t x_0 \omega_1 \omega_2)| < 1,$$

ricordando che:

$$(x_0 x_t \omega_1 \omega_2) = \frac{1}{(x_t x_0 \omega_1 \omega_2)},$$

dalle (2_t) si conclude:

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_t = \omega_1; \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x_t = \omega_2.$$

Il contrario si avrebbe, quando fosse:

$$(3'') \quad |(x_t x_0 \omega_1 \omega_2)| > 1.$$

3. La (2_t) rimane inalterata, scambiando ω_1 con ω_2 ; ne segue che x_t si esprimerà razionalmente per x_0 , x_1 , p , q . Per avere questa espressione, osserviamo che dalla (2_t) stessa si ha:

$$\frac{x_t - \omega_1}{x_t - \omega_2} = \frac{(x_t - \omega_1)^t (x_0 - \omega_2)^{t-1}}{(x_t - \omega_2)^t (x_0 - \omega_1)^{t-1}};$$

indicando quindi con λ un conveniente fattore di proporzionalità, si avrà:

$$x_t - \omega_1 = \lambda (x_t - \omega_1)^t (x_0 - \omega_2)^{t-1}; \quad x_t - \omega_2 = \lambda (x_t - \omega_2)^t (x_0 - \omega_1)^{t-1},$$

dove, sommando e sottraendo:

$$\begin{aligned} 2(x_t - p) &= \lambda \{ (x_t - \omega_1)^t (x_0 - \omega_2)^{t-1} + (x_t - \omega_2)^t (x_0 - \omega_1)^{t-1} \}, \\ \omega_2 - \omega_1 &= \lambda \{ (x_t - \omega_1)^t (x_0 - \omega_2)^{t-1} - (x_t - \omega_2)^t (x_0 - \omega_1)^{t-1} \}, \end{aligned}$$

e, dividendo la prima per la seconda, potremo porre:

$$x_t - p = \frac{L_t}{N_t},$$

essendo:

$$(5) \quad \begin{cases} 2 L_t = (x_t - \omega_1)^t (x_0 - \omega_2)^{t-1} + (x_t - \omega_2)^t (x_0 - \omega_1)^{t-1}, \\ N_t = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \{ (x_t - \omega_1)^t (x_0 - \omega_2)^{t-1} - (x_t - \omega_2)^t (x_0 - \omega_1)^{t-1} \}; \end{cases}$$

e quindi sarà

$$(6) \quad x_t = \frac{L_t + p N_t}{N_t} = \frac{M_t}{N_t},$$

con $M_t = L_t + p N_t$. In particolare, si avrà $L_t = x_t - p$, $N_t = 1$, $M_t = x_t$, ed in

generale, per t intero e positivo qualunque, L_t , N_t , M_t sono dei polinomi in x_0 , x_1 , che vogliamo determinare, mediante le (5).

Poniamo per questo

$$A_t = (x_1 - \omega_1)^t (x_0 - \omega_2)^{t-1} = L_t + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} N_t = M_t + \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} - p \right) N_t,$$

$$B_t = (x_1 - \omega_2)^t (x_0 - \omega_1)^{t-1} = L_t + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} N_t = M_t + \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} - p \right) N_t;$$

dalle identità:

$$A_{t+1} = A_t(x_1 - \omega_1)(x_0 - \omega_2), \quad B_{t+1} = B_t(x_1 - \omega_2)(x_0 - \omega_1),$$

si hanno subito per i polinomi M_t , N_t le formule ricorrenti:

$$(7) \quad \begin{cases} M_{t+1} = (x_1 x_0 - 2 p x_1 + q) M_t + q(x_1 - x_0) N_t, \\ N_{t+1} = (x_0 - x_1) M_t + (x_1 x_0 - 2 p x_0 + q) N_t, \end{cases}$$

le quali, con $M_1 = x_1$, $N_1 = 1$, permettono di calcolare successivamente i polinomi M_t , N_t . Esse danno inoltre, per induzione, che M_t ed N_t hanno in x_0 il grado $t-1$, in x_1 il grado t . Ordinandoli, prima per le potenze di x_0 , poi per quelle di x_1 , potremo scrivere:

$$(8_0) \quad \begin{cases} M_t = x_0^{t-1} H_t + \dots + K_t, \\ N_t = x_0^{t-1} I_t + \dots + J_t, \end{cases} \quad (8_1) \quad \begin{cases} M_t = x_1^t P_t + \dots + Q_t, \\ N_t = x_1^t R_t + \dots + S_t, \end{cases}$$

e per i polinomi H_t , K_t , I_t , J_t di x_1 e per gli altri P_t , Q_t , R_t , S_t di x_0 si avranno dalle (7) le formule ricorrenti:

$$(9_0) \quad \begin{cases} H_{t+1} = x_1 H_t - q I_t, \\ I_{t+1} = H_t + (x_1 - 2 p) I_t, \\ H_1 = x_1, \quad I_1 = 1, \end{cases} \quad (10_0) \quad \begin{cases} K_{t+1} = (q - 2 p x_1) K_t + q x_1 J_t, \\ J_{t+1} = -x_1 K_t + q J_t, \\ K_1 = x_1, \quad J_1 = 1, \end{cases}$$

$$(9_1) \quad \begin{cases} P_{t+1} = (x_0 - 2 p) P_t + q R_t, \\ R_{t+1} = -P_t + x_0 R_t, \\ P_1 = 1, \quad R_1 = 0, \end{cases} \quad (10_1) \quad \begin{cases} Q_{t+1} = q Q_t - q x_0 S_t, \\ S_{t+1} = x_0 Q_t + (q - 2 p x_0) S_t, \\ Q_1 = 0, \quad S_1 = 1; \end{cases}$$

e di qui si trae, ad es., che H_t , I_t hanno, rispettivamente, i gradi t , $t-1$, coi primi termini x_1^t , $t x_1^{t-1}$; P_t , R_t hanno, rispettivamente, i gradi $t-1$ e $t-2$ coi primi termini x_0^{t-1} , $-(t-1)x_0^{t-2}$, etc.

Dalle (6) e (7) si ha poi anche

$$(10) \quad x_{t+1} = \frac{(x_1 x_0 - 2 p x_1 + q) x_t + q(x_1 - x_0)}{(x_0 - x_1) x_t + (x_1 x_0 - 2 p x_0 + q)}.$$

4. Abbiamo visto al n° 2, che quando i valori iniziali x_0 , x_1 siano tali che si abbia

$$(11) \quad |(x_1 x_0 \omega_1 \omega_2)| \neq 1,$$

l'algoritmo Γ , e l'inverso, convergono, rispettivamente, alle due radici ω_1 ed ω_2 della

$f(\omega) = 0$. Nella rappresentazione dei numeri complessi sul piano di GAUSS, la (II) significa che il punto x_1 non appartiene alla circonferenza del fascio di cerchi, che ha per cerchi limiti i punti ω_1 ed ω_2 e che passa per il punto x_0 . Questa circonferenza $C(x_0; \omega_1, \omega_2)$ divide il piano in due regioni, che contengono, rispettivamente, i punti ω_1 ed ω_2 ; ed in quella che contiene il punto ω_1 è $|(x_1 x_0 \omega_1 \omega_2)| < 1$, nell'altra invece $|(x_1 x_0 \omega_1 \omega_2)| > 1$; inoltre, secondochè è $|(x_1 x_0 \omega_1 \omega_2)| \leq 1$, è anche, per s positivo, $|(x_s x_0 \omega_1 \omega_2)| \leq 1$, per t negativo $|(x_t x_0 \omega_1 \omega_2)| \geq 1$; ne segue che i punti $x_1, x_2, \dots, x_s, \dots$ apparterranno ad una, gli altri $x_{-1}, x_{-2}, x_{-3}, \dots$ all'altra delle due regioni considerate.

Posto ancora

$$(II_1) \quad (x_1 x_0 \omega_1 \omega_2) = \rho e^{i\theta},$$

è, per t qualunque, positivo o negativo

$$(II_t) \quad (x_t x_0 \omega_1 \omega_2) = \rho^t e^{it\theta};$$

i punti x_t si trovano dunque tutti su una spirale logaritmica, che contiene il punto x_0 e tende asintoticamente ai punti ω_1 ed ω_2 .

La convergenza dell'algoritmo è lineare e misurata dalla costante ρ (supposto $\rho < 1$).

Sia invece

$$|(x_1 x_0 \omega_1 \omega_2)| = 1;$$

dalle (II_t), per $\rho = 1$, si ha che tutti i punti x_s appartengono anche essi alla circonferenza $C(x_0; \omega_1 \omega_2)$; l'algoritmo Γ (e l'inverso) è periodico, se θ è commensurabile con π , altrimenti è aperiodico ed i punti x_s formano su C un gruppo dovunque condensato. In ogni caso, quando è $|(x_1 x_0 \omega_1 \omega_2)| = 1$, l'algoritmo non converge.

Consideriamo, in particolare, il caso reale; siano cioè $\omega_0, \omega_1, x_0, x_1$ reali. L'algoritmo è allora reale e se, come supponiamo, ω_1 ed ω_2 sono distinte ed x_0 non coincide con x_1 , non può aversi $(x_1 x_0 \omega_1 \omega_2) = 1$; l'algoritmo (2) convergerà dunque sempre, tranne nel caso che si abbia $(x_1 x_0 \omega_1 \omega_2) = -1$, cioè quando la proiettività iperbolica che ha come punti uniti ω_1 ed ω_2 e che ad x_0 fa corrispondere x_1 non è involutoria. Detto inoltre x'_0 il coniugato armonico di x_0 rispetto ad ω_1, ω_2 [tale dunque che sia $(x'_0 x_0 \omega_1 \omega_2) = -1]$, i punti x_s , con $s > 0$, si manterranno tutti in uno dei due segmenti $x_0 x'_0$, i punti x_t (con $t < 0$) nell'altro, e tenderanno a quella delle due radici ω_1, ω_2 che appartengono al segmento relativo.

Converrà ancora distinguere, secondochè è $(x_1 x_0 \omega_1 \omega_2) \geq 0$.

Quando sia $(x_1 x_0 \omega_1 \omega_2) > 0$, per t qualunque positivo o negativo è anche $(x_t x_{t-1} \omega_1 \omega_2) > 0$; l'algoritmo, diretto ed inverso è monotono. Se invece $(x_1 x_0 \omega_1 \omega_2) < 0$, e anche $(x_t x_{t-1} \omega_1 \omega_2) < 0$ e $(x_t x_0 \omega_1 \omega_2)$ ha il segno di $(-1)^t$; ciascuno dei due algoritmi, diretto ed inverso, è *oscillante* o *bilaterale*.

5. Sia, in particolare

$$(I') \quad f(\omega) = \omega^2 - D,$$

essendo D un numero reale e positivo, ed insieme facciamo $x_0 = \infty$. Indicando con

$\sqrt[4]{D}$ il valore positivo del radicale, l'algoritmo è allora definito dalla formula

$$(12) \quad \frac{x_t - \sqrt[4]{D}}{x_t + \sqrt[4]{D}} = \left(\frac{x_1 - \sqrt[4]{D}}{x_1 + \sqrt[4]{D}} \right)^t$$

cioè

$$(12') \quad x_t = \frac{\sqrt[4]{D} \{ (x_1 + \sqrt[4]{D})^t + (x_1 - \sqrt[4]{D})^t \}}{(x_1 + \sqrt[4]{D})^t - (x_1 - \sqrt[4]{D})^t}$$

e si avrà anche

$$(13) \quad x_{t+1} = \frac{x_1 x_t + D}{x_1 + x_t} = \frac{H_{t+1}}{I_{t+1}},$$

dove i polinomi H_t , P_t sono definiti dalle (9₀) del n° 3. Per $t = 2, 3, 4, \dots$ si avrà quindi:

$$x_2 = \frac{x_1^2 + D}{2 x_1}; \quad x_3 = \frac{x_1^3 + 3 D x_1}{3 x_1^2 + D};$$

$$x_4 = \frac{x_1^4 + 6 D x_1^2 + D^2}{4 x_1^3 + 4 D x_1}; \quad x_5 = \frac{x_1^5 + 10 D x_1^3 + 5 D^2 x_1}{5 x_1^4 + 10 D x_1^2 + D^2}; \dots$$

e l'algoritmo convergerà, quando x_1 non sia un immaginario puro, a quello dei due valori di $\sqrt[4]{D}$ che ha lo stesso segno della parte reale di x_1 . In particolare, se x_1 è reale, l'algoritmo è reale e converge a quel valore di $\sqrt[4]{D}$ che ha il segno di x_1 ; la convergenza, misurata dalla costante $\left| \frac{x_1 - \sqrt[4]{D}}{x_1 + \sqrt[4]{D}} \right|$ è monotona o bilaterale, secondo che $|x_1|$ è maggiore o minore di $\sqrt[4]{D}$.

Prendiamo ora come valore iniziale $x_1^* = \frac{D}{x_1}$. Si ha allora subito:

$$x_{2h+1}^* = \frac{D}{x_{2h+1}}; \quad x_{2h}^* = x_{2h}, \quad (h = 0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots);$$

facendo invece $x_0 = 0$, $\bar{x}_1 = x_1$, è:

$$\bar{x}_{2h+1} = x_{2h+1}; \quad \bar{x}_{2h} = \frac{D}{x_{2h}}, \quad (h = 0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots);$$

quindi insieme coll'algoritmo (13), ciascuno dei due

$$x_1, \quad \frac{D}{x_2}, \quad x_3, \quad \frac{D}{x_4}, \dots$$

$$\frac{D}{x_1}, \quad x_2, \quad \frac{D}{x_3}, \quad x_4, \dots$$

converge ancora a $\sqrt[4]{D}$, come l'algoritmo (13), etc.

6. Torniamo all'algoritmo generale, definito dalla (2_t); e facciamo in questa $t = s^k$, con s e k interi e positivi, ed $s \geq 2$; avremo subito:

$$(x_{s^k} x_0 \omega_1 \omega_2) = (x_{s^{k-1}} x_0 \omega_1 \omega_2)^s$$

posto quindi $x_i = y_o$, $x_{s,k} = y_k^{(s)}$, la uguaglianza precedente si scrive:

$$(14) \quad (y_k^{(s)} x_o \omega_1 \omega_2) = (y_{k-1}^{(s)} x_o \omega_1 \omega_2)^s \quad (k = 1, 2, \dots)$$

e, per la (6), si avrà ancora:

$$(14_k) \quad y_k^{(s)} = \frac{M_s(x_o, y_{k-1}^{(s)})}{N_s(x_o, y_{k-1}^{(s)})}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

dove le M_s , N_s sono definite, per via ricorrente, dalle (7); in particolare, per $k = 1$, sarà, posto $y_o = y_o^{(s)}$

$$(14_1) \quad y_1^{(s)} = \frac{M_s(x_o, y_o^{(s)})}{N_s(x_o, y_o^{(s)})}.$$

Per $k = 1, 2, 3, \dots$, la (14_k) definisce un algoritmo Λ_s di iterazione, il quale è, evidentemente, parte dell'algoritmo Γ definito dalla (2_t) per i valori interi e positivi di t ; esso quindi convergerà, come Γ , per tutti i valori della variabile complessa y_o , per i quali sia $|(y_o x_o \omega_1 \omega_2)| \neq 1$, e tenderà, rispettivamente, ad ω_1 o ad ω_2 , secondo che è $|(y_o x_o \omega_1 \omega_2)| \leq 1$.

Posto:

$$A = (y_o x_o \omega_1 \omega_2), \quad A_{s,k} = (y_k^{(s)} x_o \omega_1 \omega_2),$$

è poi anche:

$$A_{s,k} = A^{s^k} = (A_{s,k-1})^s;$$

ne segue che l'algoritmo Λ_s , definito dalla (14_k) ha convergenza di grado s^k .

Abbiamo così, per i diversi valori di s , una classe di algoritmi razionali, che approssimano le due radici ω_1 ed ω_2 delle (1), con un grado di convergenza che può farsi grande a piacere, e dipendono dal parametro arbitrario x_o . Considerando la circonferenza $C(x_o; \omega_1, \omega_2)$ del fascio che ha per cerchi limiti ω_1 ed ω_2 e passa per x_o , l'algoritmo Λ_s convergerà per qualunque valore di y_o , che non appartenga a $C(x_o; \omega_1, \omega_2)$, e convergerà a quella delle due radici ω_1 ed ω_2 , che sta insieme con y_o nella stessa delle due regioni, in cui la circonferenza C divide il piano complesso; anche di questi algoritmi è cioè noto il campo vero di convergenza. Per la (10) del n° 3, dall'algoritmo di grado s si ha quello di grado $s + 1$ colla formula

$$(15) \quad y_1^{(s+1)} = \frac{(y_o x_o - 2p y_o + q) y_1^{(s)} + q(y_o - x_o)}{(x_o - y_o) y_1^{(s)} + (x_o y_o - 2p x_o + q)}.$$

Consideriamo, in particolare, il caso reale; siano cioè $x_o, y_o, \omega_1, \omega_2$ reali; detto x'_o il coniugato armonico di x_o rispetto ad ω_1 ed ω_2 , l'algoritmo (14) convergerà, quando y_o sia diverso da x'_o (e da x_o), e, per s pari, si avrà sempre $(y_k^{(s)} x_o \omega_1 \omega_2) > 0$, cioè $y_k^{(s)}$ non sarà separato da x_o mediante ω_1 ed ω_2 , per s dispari $(y_k^{(s)} x_o \omega_1 \omega_2)$ ha

¹⁾ Per questa definizione cfr. O. NICOLETTI, *Sulla teoria della convergenza degli algoritmi di iterazione* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, t. XIV (1908), pp. 1-32], pp. I e II.

invece il segno di $(y_0 x_0 \omega_1 \omega_2)$, cioè $y_k^{(s)}$ sarà o meno separato da x_0 mediante ω_1 ed ω_2 , secondochè lo è oppur no il valore iniziale y_0 . In ogni caso poi l'algoritmo è monotono.

Infine, come al n° 5, poniamo $f(\omega) = \omega^2 - D$, $\omega_1 = -\omega_2 = \sqrt{D}$, indicando D un numero reale e positivo e \sqrt{D} il valore positivo del radicale, $x_0 = \infty$. Avremo:

$$(16) \quad y_1^{(s)} = \frac{H_s(y_0)}{I_s(y_0)},$$

dove i polinomi H_s , I_s sono definiti dalle (9_0) del n° 3, e per i primi valori di s avremo gli algoritmi

$$y_1^{(2)} = \frac{y_0^2 + D}{2 y_0}, \quad (\text{di NEWTON}),$$

$$y_1^{(3)} = \frac{y_0^3 + 3 D y_0}{3 y_0^2 + D} \quad (\text{di DEDEKIND}),$$

$$y_1^{(4)} = \frac{y_0^4 + 6 D y_0^2 + D^2}{4 y_0^3 + 4 D y_0}, \dots$$

che furono trovati dal JACOB per via affatto diversa ²⁾.

Ciascuno di questi algoritmi approssima, quando y_0 non sia un immaginario puro, quello dei due valori di \sqrt{D} che ha lo stesso segno della parte reale di y_0 ; in particolare, per y_0 reale e diverso da zero, il valore positivo o negativo, secondochè y_0 è positivo o negativo; è monotono e tende a \sqrt{D} per valori assolutamente maggiori di \sqrt{D} , se s è pari; per s dispari vi tende invece dalla parte di y_0 , etc.

Pisa, li 25 maggio 1916.

ONORATO NICOLETTI.

²⁾ Cfr. JACOB, *On Sequences, which determine the n-th root of a Rational Number* (Proceedings of the London Mathematical Society, 1904).

DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE D'ORDINE 7 CON UN FASCIO ELLITTICO DI CONICHE.

Nota di **Gelsomina Grimaldi** (Catania).

Adunanza del 23 luglio 1916.

In questa Nota si assegnano le superficie algebriche d'ordine $n = 7$ con infinite coniche le quali formino un fascio ellittico, nell'ipotesi che i piani di queste costituiscano un involuppo di classe $\mu > 1$.

1. Sia γ una superficie algebrica irriducibile di ordine $n = 7$, avente un fascio di coniche (K) generalmente irriducibili ¹⁾.

Indichiamo con (π) l'involuppo (irriducibile) costituito dai piani di queste, con μ la classe di (π) , con s il numero di coniche di (K) esistenti in un piano generico di (π) .

È noto ²⁾ che tra i numeri $n, \mu, s, \delta, \delta'$ esiste la relazione

$$(1) \quad 2n = 2\mu s + \delta + 2\delta'$$

ove $\delta \geq 4$ è il numero dei punti doppi dell'involuzione I'_2 secata dalle coniche di (K) sopra una sezione piana generica c di γ ; e δ' è il numero di quei punti di c (distinti o no), su ognuno dei quali cadono (su due rami) due punti coniugati della detta I'_2 . Indicando, infine, con p_c il genere di c e con p_i il genere di I'_2 , cioè di (K) , è (ZEUTHEN)

$$(2) \quad \delta = 2(p_c + 1) - 4p_i.$$

Dalle (1) e (2) si ricava

$$(3) \quad p_c = 2p_i + n - 1 - \mu s - \delta'.$$

¹⁾ È noto che ogni sistema irriducibile ∞^1 di coniche di γ è un fascio. Cfr. G. CASTELNUOVO e F. ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*. [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, vol VI (1901), pp. 165-225], n° 17; e M. DE FRANCHIS, *Le superficie irrazionali di 5° ordine con infinite coniche* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, vol. XV, 2° semestre 1906, pp. 284-286], n° 1.

²⁾ G. MARLETTA, *Sulle superficie algebriche con infinite coniche, e, in particolare, su quelle d'ordine 5* [Atti dell'Accademia Gioenia, Catania, serie V, vol VIII (1915), Memoria XIV], n° 2.

È nota ³⁾ inoltre la diseguaglianza

$$(4) \quad \mu < \frac{3n+1}{4s}$$

cioè

$$(4') \quad s < \frac{3n+1}{4\mu}.$$

2. Supporremo sempre $n = 7$, (K) ellittico, onde $p_i = 1$, e $\mu > 1$.

Dalla (4) si deduce che il massimo valore di μ è $\mu = 5$, da cui segue $s = 1$, onde (π) è ellittico.

Dalla (1) si ha $\delta' = 0$ e quindi $p_c = 3$.

Se (π) è gobbo la superficie γ esiste ⁴⁾ ed è la proiezione della superficie γ_i rappresentabile sul cono cubico (ellittico) mediante un sistema di curve dell'ottavo ordine, passanti due volte per il vertice, con altri tre punti-base doppi e un punto-base semplice ⁵⁾.

3. Supponiamo ora che l'involuppo (π) sia conico, il punto-base V di esso sarà ⁶⁾ doppio per γ e punto-base per (K).

Anche in questo caso è $p_c = 3$.

Consideriamo la superficie γ_i d'ordine 8, dell' S_6 , rappresentata sul cono cubico (ellittico) mediante un sistema lineare ∞^6 di curve del sesto ordine segate dalle quadriche che toccano il cono in un punto fisso ⁷⁾. Proiettando γ_i da uno generico ω dei piani che incontrano essa in un punto generico, si ottiene la superficie γ richiesta.

4. Sia $\mu = 4$.

Dalla (4') si ha $s = 1$, onde (π) è ellittico.

Siccome è $\delta \geq 4$ si ha $\delta' < 2$.

Sia (π) gobbo; per $\delta' = 0$ è $p_c = 4$.

È, per es., una siffatta superficie quella ottenuta nel seguente modo.

Tra i piani di un involuppo gobbo ellittico di classe $\mu = 4$ e i coni quadrici di un fascio (γ) , si stabilisca una corrispondenza $(2, 1)$, tale che esistano tre piani di (π) ognuno dei quali faccia parte del suo cono quadrico (degenere) corrispondente. Il luogo della conica comune a due elementi omologhi, a prescindere dei detti tre piani, è la superficie richiesta.

5. Per $\delta' = 1$ è $p_c = 3$.

³⁾ G. MARLETTA, *Delle superficie algebriche con infinite coniche* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XL (2° semestre 1915) pp. 103-109], n° 6.

⁴⁾ G. GASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXV (1890), pp. 695-715]; e G. SCORZA, *Le superficie a curve sezioni di genere 3* [Annali di Matematica, serie III, tomo XVI (1909), pp. 255-326 e tomo XVII (1910), pp. 281-330].

⁵⁾ SCORZA, l. c. ⁴⁾ 2ª Memoria, n° 36.

⁶⁾ MARLETTA, l. c. ²⁾, n° 3.

⁷⁾ CASTELNUOVO, l. c. ⁴⁾, n° 9.

La superficie γ esiste ⁸⁾; essa è la proiezione della superficie γ_1 del n° 2, da un generico punto complanare con una generica conica di questa superficie.

6. Sia ora (π) conico; il punto-base V di esso sarà triplo per γ e punto-base per (K) .

Per $\delta' = 0$, e quindi $p_c = 4$,

a) basta ripetere la costruzione del n° 4 supponendo che l'involuppo (π) sia conico (c i tre piani, parte dei coni corrispondenti, siano collineari). Ovvero:

b) Sia γ' un cono cubico ellittico e Σ' il suo spazio ordinario.

Si stabilisca una omografia fra il sistema Σ delle quadriche di Σ' passanti per 5 punti generici di γ' e gl'iperpiani di un S_4 . A γ' corrisponderà una superficie γ_1 d'ordine $4 \times 3 - 5 = 7$, con un fascio ellittico (K_1) di coniche.

Per calcolare l'ordine della V_3 costituita dai piani di queste, basta trovare quante sono le generatrici di γ' ognuna appartenente ad una quadrica di una data rete di Σ . Ma questa quadrica dovendo contenere la detta generatrice, passerà per il vertice V' di γ' , onde possiamo dire che il numero richiesto è quello delle generatrici appartenenti a quadriche di un dato fascio di Σ la cui quartica base passa per V' . Ma un tal numero è $4 \cdot 3 - 5 - 3 = 4$, quindi 4 è l'ordine richiesto della varietà V_3 .

Proiettando γ_1 da un punto generico, si ottiene la richiesta superficie γ .

7. Per $\delta' = 1$ è $p_c = 3$.

Si consideri la superficie γ_1 del n° 3. Proiettandola da uno generico dei piani incidenti essa in un punto, e incidenti il piano di una conica del fascio (ellittico) di coniche esistenti in essa medesima, si ottiene la richiesta superficie γ .

8. Sia $\mu = 3$.

Dalla (4') si deduce $s = 1$.

Essendo $\delta \geq 4$ risulta $\delta' < 3$.

Per $\delta' = 0$ è $p_c = 5$.

Una siffatta superficie può, per es., ottenersi come luogo della conica comune a due elementi omologhi di un involuppo ellittico di piani (π) di classe $\mu = 3$, e di un fascio di quadriche (γ) , ove fra i loro elementi esista una corrispondenza (2, 1). Questa, inoltre, sia tale che esista un piano di (π) al quale corrisponda in (γ) una quadrica (degenere) della quale quel piano sia parte.

Secondo che il vertice V del cono involuppato da (π) , appartiene ovvero no alla base di (γ) , V sarà quadruplo per γ e punto-base per (K) , ovvero semplice per γ e non punto-base per (K) .

9. Per $\delta' = 1$ è $p_c = 4$.

a) È una siffatta superficie γ quella che si ottiene con la seguente costruzione.

Sia (π) un involuppo ellittico di piani di classe $\mu = 3$, e (γ) un fascio di coni quadrici tra gli elementi dei quali sia stabilita una corrispondenza (2, 1), con la condizione che esistano due piani di (π) , uno π_1 facente parte del suo cono omologo, l'altro

⁸⁾ SCORZA, l. c. 4).

passante per la retta doppia di uno dei tre coni degeneri di (π) , e a questo cono corrispondente. Il luogo della conica comune a due elementi omologhi, nella detta corrispondenza, è, a prescindere dal piano π_1 , la superficie γ richiesta. Il vertice V del cono involupato da (π) sarà semplice per γ e non punto base per (K) .

b) Si consideri la superficie γ_1 del n° 6, b). Proiettandola da un generico punto complanare con una conica di (K_1) , si ottiene la richiesta superficie γ . Il punto-base di (π) , essendo proiezione del punto dell' S_4 corrispondente a V' , è base per (K) ed ha per γ la molteplicità $3 + 1 = 4$.

10. Per $\delta' = 2$ è $p_c = 3$.

a) Si consideri la superficie γ_1 del n° 3. Proiettandola da uno generico dei piani incidenti essa in un punto e incidenti i piani di due coniche del fascio (ellittico) di coniche esistente in γ_1 , si ottiene la richiesta superficie γ .

I piani delle coniche di γ_1 involupano un cono ellittico di classe $\mu = 3$ il cui vertice è quadruplo per γ e punto-base per (K) .

b) Si consideri la superficie γ_1 del n° 2.

È noto ⁹⁾ che i piani delle coniche di essa riempiono una V_3 ellittica normale del quinto ordine. Proiettando γ_1 dal punto comune a due di questi piani, si ottiene la richiesta superficie γ . L'involuppo (π) sarà di classe $\mu = 3$ e il suo punto-base V sarà semplice per γ e non punto-base per (k) .

11. Sia $\mu = 2$.

Dalla (4') si ha $s < 3$.

L'ipotesi di $s = 1$ si esclude perchè conduce alla razionalità del fascio (K) .

Sia $s = 2$ e quindi, per la (1), $\delta' < 2$.

Orserviamo anzitutto che il punto V , base di (π) , è triplo per γ e punto-base per (K) ; ciò risulta dalla considerazione della *curva caratteristica* ¹⁰⁾ di questo fascio. Infatti sia c la detta curva; essa ha due punti doppi in due punti A e B della superficie ψ di VERONESE, punti che costituiscono due coppie di una stessa g_2^1 esistente nella curva. Questa giace nell'iperpiano tangente doppio di ψ lungo la conica di questa passante per i punti A e B ; segue da ciò che (K) ha un punto base evidentemente triplo per γ ¹¹⁾.

Per costruire questa superficie, nell'ipotesi $\delta' = 0$, si parta da una curva ellittica C , d'ordine 7, come ora si è detto, curva la cui esistenza è evidente. Ad essa corrisponde ¹²⁾ nel piano, un sistema $(K') \infty^1$ di coniche, d'indice 7; proiettando (K') da un punto O , si ottiene un sistema d'indice $v = 7$ di coni quadrici (q) , il quale ammette come elementi doppi ciascuno dei due piani (contati due volte) che da O proiettano le due rette doppie r ed s , corrispondenti ¹³⁾ dei punti A e B .

⁹⁾ SCORZA, l. c. 5), n° 29.

¹⁰⁾ MARLETTA, l. c. 3), n° 5

¹¹⁾ Alla medesima conclusione si può anche pervenire direttamente; cfr. l. c. 6).

¹²⁾ MARLETTA, l. c. 3), n° 4.

¹³⁾ l. c. 12).

Il sistema (q) è dotato di una g_2^1 omologa della g_2^1 detta sopra, tale che i coni $2 Or$ e $2 Os$, ognuno contato due volte, costituiscono due coppie di essa. Si assegni ora un involuppo (π) di classe $\mu = 2$, passante per i piani Or ed Os , e si stabilisca una corrispondenza biunivoca fra i piani di questo e i gruppi della detta g_2^1 , in modo che ai piani Or e Os corrispondano rispettivamente i due gruppi di g_2^1 costituiti da questi coni medesimi (contati due volte). Il luogo della conica comune a due elementi omologhi è, a prescindere dai piani Or e Os , ognuno contato quattro volte, la superficie γ richiesta.

12. Per $\delta' = 1$ è $p_c = 3$.

Si può ottenere la richiesta superficie γ aggiungendo, nel n° precedente, che la curva caratteristica di (K) abbia un ulteriore contatto con la superficie di VERONESE.

13. Concludendo:

Le 14 superficie trovate si possono riassumere, servendosi della notazione ¹⁴⁾,

$$(\nu, p_i, s, \delta'), (\nu, p_i, s, \delta')_i, (\nu, p_i, s, \delta')',$$

nel seguente quadro:

$(5, 1, 1, 0),$	$(5, 1, 1, 0)',$
$(4, 1, 1, 0),$	$(4, 1, 1, 0)',$
$(4, 1, 1, 1),$	$(4, 1, 1, 1)',$
	$(3, 1, 1, 0)_i, (3, 1, 1, 0)',$
	$(3, 1, 1, 1)_i, (3, 1, 1, 1)',$
	$(3, 1, 1, 2)_i, (3, 1, 1, 2)',$
	$(2, 1, 2, 0)',$
	$(2, 1, 2, 1)',$

Catania, luglio 1916.

GELSOMINA GRIMALDI.

¹⁴⁾ G. MARLETTA, *Le superficie algebriche d'ordine 6 con infinite coniche* [Atti della R. Accademia Periziana, Anno Acc. CLXXXVIII, vol. XXVII (1915)]. Le tre notazioni del testo si riferiscono rispettivamente alle ipotesi che (π) sia gobbo, ovvero involuppi un cono il cui vertice non è punto base per (K) , o infine (K) abbia un punto base.

SU UNA GENERAZIONE DEI COMPLESSI QUADRATICI DI RETTE DEL BATTAGLINI.

Nota di **Corrado Segre** (Torino).

Adunanza del 26 novembre 1916.

1. I complessi quadratici di rette studiati dal BATTAGLINI sono quelli che si possono rappresentare, riferendoli a un conveniente tetraedro, con un'equazione contenente solo i quadrati delle 6 coordinate: ossia quelli che, senz'essere complessi tetraedrali, sono trasformati in sè dalle omologie armoniche date da un tetraedro.

F. ASCHIERI prima ¹⁾, e più tardi, indipendentemente da lui, F. SCHUR ²⁾ han dimostrato che un tal complesso Γ si può sempre definire in infiniti modi come il luogo delle rette tagliate da due quadriche assegnate secondo due coppie armoniche di punti (od anche nel modo duale). Le quadriche occorrenti in queste definizioni sono tutte quelle, convenientemente accoppiate, di un particolare sistema ∞^1 , S , i cui indici son tutti uguali a 4. Esse si possono anche caratterizzare come quelle quadriche (non coni) di cui tutte le generatrici stanno in Γ ³⁾.

In un mio lavoro giovanile ⁴⁾ io ho mostrato come questi fatti si presentino nel modo più semplice ricorrendo alla trasformazione $y_i = x_i^2$ per i punti x dello spazio. Un complesso di BATTAGLINI Γ si muta allora in un sistema di coniche di semplice definizione: cioè quelle coniche che, come superficie di 2^a classe degeneri, stanno in un dato sistema lineare ∞^4 di superficie di 2^a classe (inviluppi) tangenti a quattro piani fissi. Il tetraedroide che è superficie singolare di Γ si muta in una quadrica Q .

¹⁾ F. ASCHIERI, *Sopra un complesso di secondo grado* [Giornale di Matematiche, vol. VIII (1870), pag. 35-37].

²⁾ F. SCHUR, *Ueber einen das System zweier Flächen 2. Grades betreffenden Satz und einen damit verbundenen Strahlencomplex 2. Grades* [Mathematische Annalen Bd. XXI (1883), pag. 515-527].

Cfr. anche la trattazione di R. STURM, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung*, III. Theil (Leipzig, Teubner, 1896), pag. 328 e seguenti.

³⁾ SCHUR dimostra [loc. cit. ²⁾], pag. 525] che se un complesso quadratico contiene ambe le schiere di generatrici di una quadrica non degenera, il complesso sarà di BATTAGLINI, e la quadrica farà parte del sistema S . Vedi anche STURM, loc. cit. ²⁾, pag. 351.

⁴⁾ C. SEGRE, *Su una trasformazione irrazionale dello spazio e sua applicazione allo studio del complesso quadratico di BATTAGLINI e di un complesso lineare di coniche iscritte in un tetraedro* [Giornale di Matematiche, vol. XXI (1883), pag. 355-378].

Il sistema S di quadriche viene a corrispondere ad una ∞^1 di piani di 4^a classe e 1^a specie: i piani essendo così accoppiati che due piani di una coppia passano per una stessa generatrice, di una determinata schiera, di Q . Etc. etc.

2 In una ricerca intorno ai complessi lineari di schiere rigate, o *regoli* ⁵⁾, mi si è ora presentato il complesso di BATTAGLINI con un'altra definizione, che mi pare nuova. Di essa appunto tratterò nella presente Nota.

Sian dati due regoli α , β , su due quadriche distinte, non degeneri. Una retta p è incidente a due rette di α e due di β . Imponiamo a p la condizione che la quaterna dei suoi punti d'incontro con quelle rette sia proiettiva alla quaterna dei piani che, rispettivamente, congiungono p alle rette stesse. Dico che il luogo di p sarà un complesso quadratico di BATTAGLINI; e che ogni complesso di BATTAGLINI si può generare in questo modo ⁶⁾.

Per dimostrare che le rette p formano un complesso quadratico, basta trasformarne la definizione nel seguente modo. Siano m n le rette di α , r s quelle di β , incidenti a p . L'ipotesi fatta di proiettività fra punti e piani di p equivale a dire che vi è una congruenza lineare *speciale*, avente p per unica direttrice, contenente mnr s . Se facciamo passare un complesso lineare per questa congruenza e per una nuova retta di α , avremo un complesso lineare contenente α e p rs . Viceversa, se esiste un tale complesso lineare, la congruenza (speciale) delle sue rette appoggiate a p stabilirà fra i punti e i piani di p la proiettività voluta.

Tiriamo dunque gli ∞^2 complessi lineari (*rete*) contenenti α . Per ognuno — sia L — prendiamo le due rette rs secondo cui esso incontra β , ed assumiamole come direttrici di una congruenza lineare L' . Ogni retta p si potrà riguardare come una delle rette comuni ad un complesso L e ad una congruenza L' .

Ora, variando L nella rete, L' passa costantemente per il regolo β' incidente a β (cioè composto delle rette incidenti a quelle di β): ossia L' descrive anch'essa una rete. Le due reti son riferite reciprocamente. In fatti, se L si restringe a variare in un fascio, le coppie di rette rs che L ha comuni con β generano un'involuzione entro questo regolo; e quindi tutte le congruenze L' che le hanno per direttrici stanno nel complesso lineare per cui quelle coppie di rette son coppie di rette coniugate. Viceversa, se L' varia in un complesso lineare, L descriverà un fascio.

Così il complesso \mathcal{C} delle nostre rette p si genera colle intersezioni degli elementi omologhi di due reti (di complessi e congruenze lineari), aventi per sostegni α e β' , riferite tra loro reciprocamente. È dunque un complesso quadratico.

Risulta che esso contiene α e β' ; e analogamente dunque conterrà β e α' (regolo incidente ad α).

⁵⁾ Dovendo parlare spesso di *sistema di generatrici di una quadrica*, ossia *schiera rigata*, è opportuno avere un vocabolo unico da sostituire a quelle locuzioni. Mi permetto d'introdurre a questo scopo la parola *regolo*, che già gl'Inglesi hanno adottato (*regulus*) nello stesso senso: veggasi, ad esempio, C. M. JESSOP, *A Treatise on the Line Complex* (Cambridge, University Press, 1903), pag. 39 e oltre.

⁶⁾ Per brevità, nel seguito diremo questa la *generazione* del complesso per *incidenza su due regoli*; mentre la generazione di ASCHIERI si dirà *generazione armonica*.

3. Il complesso \mathcal{C} che abbiain definito coll'incidenza sui regoli α, β , si può definire nello stesso modo mediante i regoli α', β' incidenti a quelli. In fatti siano rispettivamente mn, rs le rette di α, β incidenti alla retta p di \mathcal{C} , ed $m'n', r's'$ le rette di α', β' che passano rispettivamente pei punti d'appoggio delle prime quattro rette su p . L'essere, per ipotesi, la quaterna di punti $p(mnrs)$ proiettiva alla quaterna di piani $p(mnrs)$, poichè questi piani passeranno rispettivamente per $n'm's'r'$, si potrà anche scrivere così: la quaterna di punti $p(m'n'r's')$ è proiettiva alla quaterna di piani $p(n'm's'r')$, ossia alla quaterna di piani $p(m'n'r's')$.

Di qui segue subito che \mathcal{C} è un complesso di BATTAGLINI, avente per tetraedro principale quello che è autopolare comune rispetto alla quadrica A di $\alpha\alpha'$ e a quella B di $\beta\beta'$. Invero l'omologia armonica rispetto ad un vertice di questo tetraedro e alla sua faccia opposta muta α e β in α' e β' : e quindi muta \mathcal{C} in se stesso; ossia \mathcal{C} ammette le omologie armoniche di quel tetraedro.

4. Una tangente generica p ad una delle due quadriche A, B (n° 3) soddisfa, a prima giunta, alla condizione che definisce le rette del nostro complesso (n° 2): in quanto che, venendo per essa a coincidere, ad esempio, m ed n , esiste, senz'altro, la proiettività fra i punti e i piani $p(mnrs)$. In tal caso non si applica più a p il ragionamento che ci ha portato alla generazione, con reti reciproche, del complesso quadratico \mathcal{C} . Si deve dunque sottintendere nella nostra definizione che quelle tangenti *generiche* vanno escluse.

D'altra parte \mathcal{C} contiene necessariamente delle *particolari* tangenti di A (che occorre cioè introdurre in \mathcal{C} per render *chiuso* l'aggregato, ossia per avere tutto un complesso algebrico). Son le rette comuni a due complessi quadratici: forman dunque una congruenza (4, 4). Se una tangente p di A , che non sia generatrice di questa quadrica, sta in \mathcal{C} , il fascio di tangenti di A a cui essa appartiene avrà comuni con \mathcal{C} tre rette (p e le due generatrici), e quindi starà tutto in \mathcal{C} . Perciò quella congruenza (4, 4) si compone di ∞^1 fasci, i cui centri formeranno su A una curva di 4° ordine e i piani un inviluppo di 4ª classe.

Consideriamo ora invece una retta p di \mathcal{C} che passi per un punto P comune alle quadriche A e B . Essa avrà coincidenti in P , ad esempio, i due punti d'incontro colle rette m e r di α e β . Perchè p soddisfi alla definizione del n° 2, nell'ipotesi che la proiettività fra le due quaterne di punti e piani di p non degeneri, bisognerà che coincidano pure i due piani omologhi dei due punti suddetti, ossia i piani pm, pr . Se invece questi due piani sono distinti, la proiettività sarà degenerare, e il punto $P(=pm=pr)$, cui corrispondono due piani distinti, sarà punto singolare per essa; mentre il piano singolare avrà per corrispondenti gli altri due punti pn, ps , e sarà dunque un piano in cui coincideranno i due piani pn, ps . In conclusione per ogni retta p di \mathcal{C} passante per P coincidono i due piani pm, pr , oppure i due piani pn, ps ⁷⁾ (che son gli stessi che pm', pr' del n° 3).

7) Lo stesso si ottiene considerando la congruenza lineare speciale (n° 2) avente per direttrice p e contenente mnr : il 2° caso corrisponde allo spezzarsi di questa congruenza.

Adunque la quartica intersezione delle quadriche A e B è luogo di punti singolari pel complesso \mathcal{C} . Il cono di rette di \mathcal{C} uscente da un suo punto qualunque P si spezza in due fasci, determinati, l'uno dalle due rette di α e di β , l'altro da quelle di α' e β' , passanti per P .

Di passaggio, otteniamo questo corollario: Date due quadriche, sull'una delle quali siano α e α' i due regoli, sull'altra β e β' , se per ognuno dei 4 punti comuni a quelle quadriche e ad un piano π si tirano in questo le due rette tracce del piano delle generatrici di α e β , o di α' e β' , passanti pel punto, si avranno 8 tangenti di una stessa conica (la conica di \mathcal{C} giacente in π).

5. Prendiamo ora un complesso generale di BATTAGLINI Γ . Sia F il tetraedroide, sua superficie singolare. Risulta dai lavori citati al n° 1, in particolare dalla ricordata rappresentazione spaziale $y_i = x_i^2$, che su F stanno due sistemi ∞^1 (fasci razionali) di quartiche di 1^a specie C_+ , residui l'un dell'altro (omologhi rispettivamente dei due sistemi di generatrici rettilinee della quadrica Q del n° 1), tali che ogni quadrica del sistema S di ASCHIERI sega F in due C_+ rispettivamente dei due sistemi, e che viceversa per ogni C_+ passano due quadriche di S .

Le C_+ di un 1° sistema sono le intersezioni di quadriche A, A_1 , fra loro omologhe per la generazione armonica (di ASCHIERI) di Γ . Le tangenti ad A, A_1 nei punti della loro C_+ comune son rette di Γ (sicchè la C_+ risulta essere inviluppo di rette singolari di Γ).

Si consideri invece una C_+ del 2° sistema e le due quadriche A, B di S che si segano in essa. Per ogni suo punto, come punto singolare di Γ , esce un cono di questo complesso spezzato in due fasci di rette, i quali complessivamente dovranno contenere le quattro generatrici di A, B (che son rette di Γ) passanti pel punto. Supporre che sempre uno di quei fasci contenga le due generatrici di A (e l'altro quelle di B) equivarrebbe a dire che le tangenti ad A nei punti della C_+ stanno tutte in Γ : mentre invece le tangenti ad A che stanno in Γ hanno, come s'è detto, i punti di contatto sull'altra C_+ di A (l'intersezione con A_1). Dunque, detti $\alpha\alpha'$ i regoli di A , $\beta\beta'$ quelli di B , staranno nell'un fascio, ad esempio, la retta di α e quella di β , e nell'altro fascio le rette di α' e β' . Quindi il complesso \mathcal{C} definito (n° 2) coll'incidenza sui regoli α e β (od α' e β') avrà comuni con Γ (n° 4) infiniti fasci di rette costituenti due congruenze di 4° ordine e 4^a classe: e però coinciderà con Γ .

Resta così dimostrato che: ogni complesso di BATTAGLINI si può generare nel modo indicato al n° 2, e che anzi i regoli $\alpha\beta$ si possono scegliere in ∞^1 modi sulle quadriche di quello stesso sistema S che serve alla generazione armonica del complesso. Entro S ogni quadrica A ne ha una associata per la generazione armonica, ed una associata per la generazione con incidenza su due regoli: sono rispettivamente le due quadriche di S che tagliano A secondo le due quartiche che essa ha comuni col tetraedroide.

6. Volendo ritrovare il risultato precedente per via analitica, prendiamo due quadriche riferite al loro comune tetraedro polare:

$$(1) \quad A \equiv \sum a_i x_i^2 = 0, \quad B \equiv \sum b_i x_i^2 = 0.$$

Data una retta p di coordinate p_{ik} , le quadriche del loro fascio, $\lambda A + \mu B$, tangenti ad essa rispondono ai valori di λ, μ soluzioni dell'equazione

$$(2) \quad \lambda^2 \sum a_1 a_2 p_{12}^2 + \lambda \mu \sum (a_1 b_2 + a_2 b_1) p_{12}^2 + \mu^2 \sum b_1 b_2 p_{12}^2 = 0;$$

e dualmente dalla schiera di quadriche che contiene A e B si ha quest'altra equazione:

$$(3) \quad \lambda^2 \sum \frac{p_{12}^2}{a_3 a_4} + \lambda \mu \sum \left(\frac{1}{a_3 b_4} + \frac{1}{a_4 b_3} \right) p_{12}^2 + \mu^2 \sum \frac{p_{12}^2}{b_3 b_4} = 0.$$

In base a ciò, si scrive che un birapporto delle due coppie di punti d'intersezione della retta p con A, B è uguale ad un birapporto delle due coppie di piani tangenti tirati da p a quelle stesse quadriche, ponendo:

$$\frac{[\sum (a_1 b_2 + a_2 b_1) p_{12}^2]^2}{\sum a_1 a_2 p_{12}^2 \cdot \sum b_1 b_2 p_{12}^2} = \frac{[\sum \left(\frac{1}{a_3 b_4} + \frac{1}{a_4 b_3} \right) p_{12}^2]^2}{\sum \frac{p_{12}^2}{a_3 a_4} \cdot \sum \frac{p_{12}^2}{b_3 b_4}}$$

ossia:

$$[\sum (a_1 b_2 + a_2 b_1) p_{12}^2]^2 = a_1 a_2 a_3 a_4 b_1 b_2 b_3 b_4 \left[\sum \left(\frac{1}{a_3 b_4} + \frac{1}{a_4 b_3} \right) p_{12}^2 \right]^2.$$

Così la retta p ha per luogo un complesso di 4° grado, il quale però si spezza nei due complessi quadratici

$$(4) \quad \sum (a_1 b_2 + a_2 b_1) p_{12}^2 = k \sum \left(\frac{1}{a_3 b_4} + \frac{1}{a_4 b_3} \right) p_{12}^2,$$

ove k indica l'una o l'altra radice quadrata di $a_1 a_2 a_3 a_4 b_1 b_2 b_3 b_4$. Questo spezzamento del luogo di p risponde al separare su A , e così su B , i due regoli che vi stanno — e siano α, α' e β, β' —, e poi distinguere secondo che l'uguaglianza di birapporti che s'è posta si ha per essere p nel complesso generato per incidenza (n° 2) sulla coppia α, β (ossia α', β'), od in quello proveniente dalla coppia α, β' (ossia α', β).

Dato un complesso di BATTAGLINI

$$(5) \quad \sum c_{12} p_{12}^2 = 0,$$

esso si genererà per incidenza su due regoli delle quadriche (1), se la (4) coincide colla (5), ossia se

$$(6) \quad a_1 b_2 + a_2 b_1 - k \left(\frac{1}{a_3 b_4} + \frac{1}{a_4 b_3} \right) = \varphi c_{12},$$

colle cinque equazioni analoghe. Da questa e dall'equazione contenente c_{34} si trae che $\varphi(c_{12} a_3 a_4 + c_{34} a_1 a_2)$ è una funzione simmetrica dei quattro indici inferiori; ossia:

$$(7) \quad c_{12} a_3 a_4 + c_{34} a_1 a_2 = c_{13} a_4 a_2 + c_{42} a_1 a_3 = c_{14} a_2 a_3 + c_{23} a_1 a_4.$$

Ora sono appunto queste le equazioni di ASCHIERI per il sistema S delle quadriche che servono alla generazione armonica.

Si verifica poi che le (6) son soddisfatte se, oltre alle (7), si pone

$$(8) \quad \frac{a_1 b_1}{c_{12} c_{13} c_{14}} = \text{analoghe},$$

che sono tre equazioni, le quali, per ogni quadrica A di S , individueranno la quadrica B ad essa associata per la generazione del complesso (5) con incidenza su regoli ⁸⁾.

7. Con ciò si potrebbe riguardare come esaurito l'argomento.

Pur tuttavia mi pare che possa offrire qualche interesse il riprendere la questione dal punto di vista proprio della geometria delle rette, ossia operando nello spazio S_3 , su cui una V_4^2 irriducibile, R , rappresenta coi suoi punti le rette dello spazio ordinario.

Un dato complesso quadratico è allora rappresentato dalla varietà Γ intersezione di R con un'altra V_4^2 . Se il complesso è generato da incidenza su due regoli α, β , questi saranno dati in S_3 dall'intersezione di R con due piani, che indicheremo ancora con α, β . I regoli incidenti a quei due saran rappresentati analogamente dai piani α', β' , polari di α, β rispetto ad R . Ora al n° 2 si era rilevato che la definizione ivi data del complesso equivaleva a questa: ogni retta p di esso è direttrice di una congruenza lineare speciale che contiene due rette del regolo α' e due del regolo β' ⁹⁾. Trasportando ciò in S_3 abbiamo: Γ è il luogo di un punto di R tale che esiste un S_3 tangente in esso ad R e incidente secondo rette ai piani α', β' . E polarizzando rispetto ad R : Γ è il luogo dei punti di contatto di R con rette incidenti ai piani α, β . Cerchiamo appunto Γ secondo questa definizione ¹⁰⁾.

A questo scopo si potrebbe anzi tutto applicare qui un ragionamento sintetico equivalente a quello che per lo spazio rigato (ora rappresentato in S_3) s'era fatto al n° 2. Se cioè P è un punto di Γ , ed m la retta tangente in esso a R ed incidente a α, β , P starà sia sull'iperpiano polare del punto $m\alpha$ rispetto ad R , sia sull' S_3 che da β proietta lo stesso punto $m\alpha$. Ora quell'iperpiano descrive, intorno al piano α' polare di α , una rete che è reciproca a quella descritta dall' S_3 intorno a β ; queste due reti reciproche generano una V_4^2 , contenente α' e β , la quale segnerà R secondo Γ .

Ma anzi che proseguire per questa via, preferiamo procedere analiticamente.

8. Semplifichiamo la rappresentazione analitica, osservando che le 3 rette che sono incidenti ai quattro piani $\alpha \beta \alpha' \beta'$ (le diremo d'or innanzi le *rette principali*) formano una *terna polare* rispetto ad R , vale a dire son tali che ognuna ha per S_3 polare rispetto ad R lo spazio delle altre due. In conseguenza, se si prendono ad arbitrio su ciascuna di esse due punti coniugati rispetto ad R , e i sei punti si assumono come fondamentali (1 4, 2 5, 3 6) per le coordinate, R si potrà rappresentare così:

$$(9) \quad R \equiv \sum x_i^2 = 0.$$

⁸⁾ Le (8) s'incontrano, per altra via, a pag. 523 lin. 10 della Nota di SCHUR.

⁹⁾ Secondo il n° 2 si dovrebbe qui dire α e β ; ma al n° 3 si è visto che questi regoli posson sostituirsi con α' e β' .

¹⁰⁾ La trattazione seguente si applica senz'altro al problema più generale: in S_{2q+1} ricercare il luogo Γ dei punti di contatto di una data V_{2q}^2 con rette appoggiate a due dati S_q . Γ risulta l'intersezione di quella forma quadrica con un'altra. Vedi la nota ¹¹⁾.

Il piano α si determini colle sue tracce sulle tre rette principali, cioè coi punti

$$(10) \quad \begin{cases} (a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0) \\ (0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0) \\ (0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1), \end{cases}$$

e così il piano β coi punti

$$(11) \quad \begin{cases} (b_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0) \\ (0 & b_2 & 0 & 0 & 1 & 0) \\ (0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 1). \end{cases}$$

Un punto x di Γ starà ($n^\circ 7$) sulla retta che unisce un punto di α , ottenuto combinando linearmente i tre punti (10) coi fattori $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, ad un punto di β , ottenuto combinando i punti (11) coi fattori $\mu_1 \mu_2 \mu_3$. Ossia

$$(12) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda_1 a_1 + \mu_1 b_1, & x_2 = \lambda_2 a_2 + \mu_2 b_2, & x_3 = \lambda_3 a_3 + \mu_3 b_3 \\ x_4 = \lambda_1 + \mu_1, & x_5 = \lambda_2 + \mu_2, & x_6 = \lambda_3 + \mu_3. \end{cases}$$

Inoltre quella retta deve giacere sull'iperpiano tangente in x a R , cioè giace su quell'iperpiano il punto di α ora considerato. Dunque: *

$$(13) \quad x_1 \lambda_1 a_1 + x_2 \lambda_2 a_2 + x_3 \lambda_3 a_3 + x_4 \lambda_1 + x_5 \lambda_2 + x_6 \lambda_3 = 0.$$

Dalle (12) eliminando le μ abbiamo:

$$x_1 - b_1 x_4 = \lambda_1 (a_1 - b_1), \dots, x_3 - b_3 x_6 = \lambda_3 (a_3 - b_3);$$

e di qui ricavando le λ e sostituendole in (13):

$$(14) \quad \frac{(a_1 x_1 + x_4)(x_1 - b_1 x_4)}{a_1 - b_1} + \frac{(a_2 x_2 + x_5)(x_2 - b_2 x_5)}{a_2 - b_2} + \frac{(a_3 x_3 + x_6)(x_3 - b_3 x_6)}{a_3 - b_3} = 0.$$

È questa una nuova equazione quadratica nelle x : il che ci conferma che il nostro complesso di rette è di 2° grado. Si vede pure che rispetto alla varietà quadrica (14) la terna delle rette principali 14, 25, 36 è ancora una *terna polare*: il che si poteva prevedere, da cose precedenti. Se dunque supponiamo che come punti fondamentali delle coordinate su ognuna di quelle tre rette si sia presa precisamente la coppia dei punti coniugati comuni ad R e a quella nuova varietà quadrica, questa sarà rappresentata anch'essa da una somma di quadrati.

9. In base a ciò, assumiamo ora per data la varietà Γ , come intersezione di R stessa che ha per equazione la (9), e di

$$(15) \quad \sum t_i x_i^2 = 0.$$

Perchè con R e coi piani α , β determinati dalle terne di punti (10), (11) venga generata Γ nel modo esposto al $n^\circ 7$, dovrà la (14) essere una combinazione lineare delle equazioni (9) e (15); ossia:

$$(16) \quad a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = 1$$

$$(17) \quad \frac{a_1}{a_1 - b_1} = \rho + \sigma t_1, \quad - \frac{b_1}{a_1 - b_1} = \rho + \sigma t_1,$$

e due coppie di equazioni analoghe alle (17) (ottenute mutando gl'indici 1 4 in 2 5 e in 3 6).

Dalle (17) sommando si ha

$$(18) \quad 1 = 2\rho + \sigma(t_1 + t_4),$$

e due analoghe. Dunque anzitutto perchè il problema sia possibile devono i coefficienti della (15) verificare le condizioni:

$$(19) \quad t_1 + t_4 = t_2 + t_5 = t_3 + t_6.$$

Ciò significa che nel fascio delle forme quadriche passanti per Γ i 6 coni si posson accoppiare in 3 coppie di un'involuzione di cui R è un elemento doppio ¹¹⁾. E questo fatto si traduce, com'è noto, in S_3 dicendo che il complesso quadratico rappresentato da Γ dev'essere un complesso di BATTAGLINI.

Supposto poi che le (19) sian soddisfatte, possiamo rappresentare Γ colla (9) e — invece della (15) — una tal combinazione lineare di (9) e (15) che, chiamando ancora t_i i coefficienti delle x_i^2 in essa, le (19) si precisino nel seguente modo:

$$t_1 + t_4 = t_2 + t_5 = t_3 + t_6 = 0.$$

Così la (15) si muta in ¹²⁾:

$$(20) \quad T \equiv t_1(x_1^2 - x_4^2) + t_2(x_2^2 - x_5^2) + t_3(x_3^2 - x_6^2) = 0.$$

e la (18) diventa $1 = 2\rho$, che rende le due (17) equivalenti a

$$\frac{b_1}{a_1 - b_1} = t_1\sigma - \frac{1}{2},$$

ossia, eliminando b_1 per mezzo della (16), e poi scrivendo anche le due equazioni analoghe cogl'indici 2 e 3 invece che 1:

$$(21) \quad a_1^2 = \frac{2t_1\sigma + 1}{2t_1\sigma - 1}, \dots, \quad a_3^2 = \frac{2t_3\sigma + 1}{2t_3\sigma - 1}.$$

Abbiamo dunque il seguente risultato: affinchè la varietà Γ intersezione di R e T , definite da (9) e (20), provenga nel modo voluto (n° 7) da R e dai piani α , β che congiungono le terne di punti (10), (11), è condizione necessaria e sufficiente che si verifichino le (21) e le (16). Nelle (21) σ è un parametro arbitrario, col variar del quale otteniamo ∞^1 terne $a_1 a_2 a_3$, ossia piani α ; e ad ognuno di questi, per le (16), risponde un piano β . Sono dunque ∞^1 le coppie di piani $\alpha \beta$ che risolvono il problema. — Naturalmente il piano β descrive lo stesso sistema ∞^1 che il piano α : se α corrisponde per le (21) a σ , β proverrà da $-\sigma$.

10. La varietà di piani, data dalle formole (10) e (21), così ottenuta (d'ordine 12, colle tre rette principali come rette quaduple), si genera assai semplicemente. Le (21)

¹¹⁾ L'analogia condizione varrà pel problema generale di S_{2q+1} accennato nella ¹⁰⁾.

¹²⁾ Questa varietà T del fascio, data dalla (20), è il secondo elemento doppio dell'involuzione interna al fascio, di cui s'è parlato dianzi. R e T segano ciascuna delle tre rette principali in due coppie di punti mutuamente armoniche.

danno, per ogni σ , sulle tre rette principali coppie di punti $(a_1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$, \dots , di tre particolari involuzioni. Sono le coppie segate su quelle rette dalle forme quadriche $R - 2\sigma T = 0$, come subito si vede sostituendo in quest'equazione, ad esempio, il punto $(a_1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$. I piani della nostra varietà si hanno dunque, a gruppi di 8, congiungendo fra loro in tutti i modi possibili i punti d'incontro delle tre rette principali con una stessa forma quadrica del fascio RT (il che dà 8 piani contenuti in quella forma) ¹³).

La varietà è polare di sè stessa, sì rispetto ad R che rispetto a T . Per ogni suo piano α il piano polare rispetto a R rappresenta il regolo incidente al regolo rappresentato da α ; mentre il piano polare rispetto a T è, per le (16), il piano β associato ad α per la nostra generazione di Γ .

Si prendan le intersezioni delle tre rette principali con una forma quadrica (σ) del fascio RT , e le intersezioni delle rette stesse colla forma quadrica ($-\sigma$) che nel fascio è coniugata armonica della prima rispetto a R e T . Allora ad ognuno, α , degli 8 piani congiungenti 3 punti del 1° gruppo è associato come piano β , cioè come polare rispetto a T , un piano che unisce 3 punti del 2° gruppo, ed è polare rispetto ad R il piano che congiunge i residui 3 punti di questo 2° gruppo. Trasportando queste ultime osservazioni colla polarità rispetto a R , e poi riportandole allo S_3 rigato, si ottiene il seguente risultato:

S'indichino con $c_l d_l$ ($l = 1, 2, 3$) le tre coppie di spigoli opposti di un tetraedro ¹⁴), riguardate come complessi lineari speciali. Nel fascio di complessi lineari determinato da c_l e d_l , si fissi (per ogni l) un'involuzione contenente la coppia $c_l d_l$. Si riferiscano proiettivamente fra loro le tre involuzioni, in modo che in esse siano omologhe le tre coppie $c_l d_l$, ed anche le coppie ¹⁵) che sono rispettivamente armoniche a queste ¹⁶). Dopo ciò, se sono $m_l n_l$ ($l = 1, 2, 3$) tre coppie variabili di complessi lineari delle tre involuzioni, omologhe per quel riferimento proiettivo, gli 8 regoli intersezioni di tre complessi tolti rispettivamente da quelle tre coppie descriveranno un sistema S di ASCHIERI (n° 1) relativo ad un complesso quadratico di BATTAGLINI. E ad uno qualunque di tali regoli, per esempio a quello che è intersezione dei complessi $m_1 m_2 m_3$, sarà associato per la generazione del n° 2 del complesso di BATTAGLINI quel regolo che è incidente al regolo intersezione di $n_1 n_2 n_3$.

Torino, ottobre 1916.

CORRADO SEGRE.

¹³) In particolare le intersezioni delle tre rette principali con R , congiunte fra loro, danno 8 piani di R , cui rispondono in S_3 , come stelle e piani rigati, i vertici e le facce del tetraedro principale del complesso quadratico di BATTAGLINI.

¹⁴) Corrispondono alle tracce di R sulle tre rette principali.

¹⁵) Queste provengono dalle tracce di T sulle rette principali. Si tien conto qui della fine della nota ¹²).

¹⁶) Sicchè nelle proiettività restan solo più due costanti arbitrarie.

SULLE DERIVATE SUCCESSIVE DELLE FUNZIONI COMPOSTE DI QUANTE SI VOGLIONO VARIABILI.

Nota di **Ugo Amaldi** (Modena).

Adunanza del 12 novembre 1916.

La ricerca di formole per il calcolo diretto delle derivate successive delle *funzioni di funzione* e delle *funzioni composte di quante si vogliono funzioni di una sola variabile indipendente* ha fornito, un tempo, argomento a numerose ricerche, sopra tutto in seguito e, forse, per impulso dell'opuscolo di R. HOPPE, *Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten*, (Leipzig, 1845) ¹).

Ma non è a mia conoscenza che sia stato esaurito il problema nel caso più generale delle *funzioni composte di funzioni di quante si vogliono variabili indipendenti*.

Ora io sono stato indotto ad occuparmi appunto di quest'ultimo caso da una geniale e feconda osservazione di P. MEDOLAGHI ²), il quale ha messo in luce l'importanza fondamentale, che, nella teoria dei *gruppi continui infiniti* (cioè dipendenti da funzioni arbitrarie) compete alla interpretazione grupale delle equazioni, che legano le derivate delle funzioni composte a quelle delle funzioni componenti, nel caso in cui queste ultime siano in numero uguale alle variabili indipendenti.

La ricerca, di cui qui ci occupiamo, si riduce essenzialmente ad una questione *combinatoria*; e, adottando questo punto di vista e ricorrendo ad una opportuna rappresentazione simbolica dei prodotti di derivate delle funzioni componenti, potremo scorgere e seguire passo passo l'algoritmo, secondo cui, al sovrapporsi delle successive derivazioni composte, si moltiplicano e si complicano i termini dei rispettivi sviluppi.

¹) Non ho potuto aver visione di questo opuscolo. — Parecchi dei lavori pubblicati sull'argomento si trovano elencati in E. PASCAL, *Esercizi critici di Calcolo differenziale e integrale*, II edizione (Milano, Hoepli, 1909), pp. 107-108.

²) P. MEDOLAGHI, *Sulla teoria dei gruppi infiniti continui* [Annali di Matematica pura ed applicata, s. II, t. XXV (1897), pp. 179-217]. A codesta osservazione del MEDOLAGHI va ravvicinata la Memoria di É. PICARD, *Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, s. IV, t. VIII (1892), pp. 217-232].

Apparirà, in tal modo, manifesto il procedimento, relativamente semplice, che permette di calcolare direttamente le derivate delle funzioni composte.

Naturalmente le varie formole, già note nei casi speciali accennati dappprincipio, sono tutte trasformabili in determinazioni particolari di quelle generali che qui daremo; avverto che queste ultime contengono, tali e quali, come casi particolari:

1) la formola relativa alle funzioni di funzione di una sola variabile che è dimostrata dal CESÀRO nel suo *Corso di Analisi algebrica* (Nota VI, pp. 496-499) e che credo dovuta ad A. FAIS ³⁾, il quale la dedusse da una formola di R. HOPPE;

2) la formola relativa alle funzioni composte di più funzioni di una sola variabile indipendente, dimostrata, per via non combinatoria, da F. MOSSA ⁴⁾.

Il procedimento seguito nella presente Nota ci permetterà di riconoscere la vicendevole equivalenza, dal punto di vista combinatorio, dei due problemi or ora indicati e risolti dal FAIS e dal MOSSA: e, in generale, assoderemo che il grado di difficoltà del problema della derivazione successiva delle funzioni composte dipende dal numero delle variabili indipendenti, non da quello delle funzioni componenti (o intermedie).

Aggiungo, infine, che alla formola, dianzi ricordata, del MOSSA va ravvicinata la formola stabilita dallo STOLZ ⁵⁾ per le successive derivate di $f[x, y(x)]$. Questa formola fu di recente ridimostrata dall'ENRIQUES con un elegante procedimento fondato sull'uso di simboli e concetti operatori ⁶⁾.

I.

Osservazioni preliminari.

I. Sia z una funzione delle n variabili (intermedie) y_i , ciascuna delle quali sia funzione delle m variabili (indipendenti) x_j ; talchè si avrà:

$$(I) \quad \frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_i^n \frac{\partial z}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Se immaginiamo di iterare quante e quali si vogliano derivazioni rispetto alle x_j , appar manifesto che una qualsiasi derivata della z

$$\frac{\partial^{s_1+s_2+\dots+s_m} z}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \dots \partial x_m^{s_m}}$$

risulta espressa *linearmente* per mezzo delle derivate di z rispetto alle variabili inter-

³⁾ A. FAIS, *Nota intorno alle derivate d'ordine superiore delle funzioni di funzione* [Giornale di Matematiche di BATTAGLINI, vol. XIII (1875), pp. 47-48].

⁴⁾ F. MOSSA, *Sulla derivazione successiva delle funzioni composte* [Giornale di Matematiche di BATTAGLINI, vol. XIII (1875), pp. 175-185].

⁵⁾ O. STOLZ, *Ueber die singulären Punkte der algebraischen Functionen und Curven* [Mathematische Annalen, Bd. VIII (1875); pp. 415-443].

⁶⁾ Cfr. il Cap. III del II Vol. [in corso di stampa] di F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (Bologna, Zanichelli).

cosicchè, partendo da queste H di indici minimi, si possono calcolare per mezzo delle (4), in via ricorrente tutte le altre forme H .

Così, per es., troviamo:

$$(6) \quad \begin{cases} H_{2,0,\dots,0}^{2,0,\dots,0} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right)^2, & H_{1,1,0,\dots,0}^{2,0,\dots,0} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, & H_{2,0,\dots,0}^{1,1,0,\dots,0} = 2 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \\ H_{1,1,0,\dots,0}^{1,1,0,\dots,0} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, & \text{etc.,} \end{cases}$$

ossia, genericamente:

$$(7) \quad \begin{cases} H_{0,\dots,2h,\dots,0}^{0,\dots,2h,\dots,0} = \left(\frac{\partial y_h}{\partial x_k} \right)^2, & H_{0,\dots,1h,\dots,1i,\dots,0}^{0,\dots,2h,\dots,0} = \frac{\partial y_h}{\partial x_k} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}, \\ H_{0,\dots,1h,\dots,1j,\dots,0}^{0,\dots,1h,\dots,1j,\dots,0} = 2 \frac{\partial y_h}{\partial x_k} \frac{\partial y_h}{\partial x_j}, & H_{0,\dots,1h,\dots,1j,\dots,0}^{0,\dots,1h,\dots,1j,\dots,0} = \frac{\partial y_h}{\partial x_k} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial y_h}{\partial x_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}; \end{cases}$$

e similmente

$$(8) \quad H_{1,0,\dots,0}^{2,0,\dots,0} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}, \quad H_{1,0,\dots,0}^{1,1,0,\dots,0} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \text{ etc.,}$$

ossia, genericamente;

$$(9) \quad H_{0,\dots,1h,\dots,0}^{0,\dots,2h,\dots,0} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y_h}{\partial x_k^2}, \quad H_{0,\dots,1h,\dots,0}^{0,\dots,1h,\dots,1j,\dots,0} = \frac{\partial^2 y_h}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Notiamo, in via generale, che, in base al processo ricorrente dianzi indicato, una medesima $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$ si potrà, per lo più, calcolare per diverse vie e, precisamente, in tanti modi quanti sono gli ordini, in cui si possono combinare, per prodotto operatorio, le derivazioni del r^o ordine

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x_m}$$

per ottenere la

$$\frac{\partial^{s_1+s_2+\dots+s_m}}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \dots \partial x_m^{s_m}}.$$

3. Prima di procedere oltre, fissiamo alcune locuzioni.

Per una qualsiasi forma $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$, moltiplicatore di

$$\frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} \gamma}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \dots \partial y_n^{\alpha_n}}$$

nello sviluppo di

$$\frac{1}{s_1! s_2! \dots s_m!} \frac{\partial^{s_1+s_2+\dots+s_m} \gamma}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \dots \partial x_m^{s_m}},$$

diremo *indice parziale primo, secondo, ..., n^{mo} ordinatamente* i numeri interi (positivi o, in parte, nulli)

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_n,$$

e *apice parziale primo, secondo, ..., m^{no}* i numeri pur essi interi (positivi o, in parte,

nulli)

$$s_1, s_2, \dots, s_m;$$

chiameremo poi *indice totale* e *apice totale* rispettivamente i due numeri interi, *entrambi necessariamente maggiori di zero*,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad s = s_1 + s_2 + \dots + s_m.$$

L'indice totale di una qualsiasi forma H è minore o, tutt'al più, uguale al rispettivo apice totale; cosicchè le H di dato apice totale s si possono distribuire in s categorie secondo il valore

$$1, 2, \dots, s$$

dell'indice totale.

Risulta poi dalle (4) che: *Per poter calcolare tutte le forme H di apice totale s e di indice totale α , basta conoscere tutte quelle di apice totale $s - 1$ e di indice totale α ed $\alpha - 1$.*

II.

Proprietà degli indici e degli apici delle forme H .

4. Ciò che interessa si è, naturalmente, di ricostruire, in base al processo ricorrente indicato al n° 2, un metodo che permetta di calcolare direttamente una qualsiasi forma H , quando ne siano prefissati gli indici e gli apici parziali. Perciò è necessario anzitutto di stabilire per codesti indici ed apici alcune proprietà generali.

Fissiamo per un momento l'attenzione sulle forme H di apice totale 1 e 2, quali sono fornite dalle (5)-(9), per es. sulle seguenti, che, all'infuori di sostituzioni cicliche sugli indici e sugli apici parziali, forniscono tutti i tipi possibili:

$$\begin{aligned} H_{1,0,\dots,0}^{1,0,\dots,0} &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1}; \\ H_{2,0,\dots,0}^{2,0,\dots,0} &= \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2, \quad H_{1,1,\dots,0}^{2,0,\dots,0} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \quad H_{2,0,\dots,0}^{1,1,\dots,0} = 2 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \\ H_{1,1,0,\dots,0}^{1,1,0,\dots,0} &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \\ H_{1,0,\dots,0}^{2,0,\dots,0} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}, \quad H_{1,0,\dots,0}^{1,1,0,\dots,0} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned}$$

Su ciascuna di codeste H , monomie o binomie, si rileva senz'altro che:

1) l'*indice totale* è uguale al numero dei fattori (derivate) di ciascun termine; e, di questi fattori, implicano la y_1 tanti quante sono le unità del *primo indice parziale*, implicano la y_2 tanti quante sono le unità del *secondo indice parziale*;

2) il *primo apice parziale* dà la somma degli ordini delle derivazioni rispetto ad x_1 , che compaiono in ciascun termine, mentre il *secondo apice parziale* dà l'analoga somma degli ordini delle derivazioni rispetto ad x_2 .

Ora siffatte coincidenze non sono fortuite, ma hanno carattere del tutto generale, in quanto sussiste il seguente teorema:

Una qualsiasi forma $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$ è uguale alla somma di certi monomi, prodotti di derivate delle y_i rispetto alle x_j , in ciascuno dei quali:

1°) vi sono precisamente, come fattori,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

derivate, delle quali α_1 implicano la y_1 , α_2 la y_2 , ..., α_n la y_n ;

2°) la somma degli ordini (parziali) di derivazione di codesti fattori rispetto ad x_1 è uguale ad s_1 , la somma degli ordini di derivazione rispetto ad x_2 è uguale ad s_2 , ..., la somma degli ordini di derivazione rispetto ad x_m è uguale ad s_m .

Poichè il teorema si è già verificato direttamente per tutte le H di apice totale minore di 3, lo dimostreremo, in generale, per la $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$ per induzione, cioè ammettendolo già valido per tutte le H di apice totale minore di

$$s_1 + s_2 + \dots + s_m.$$

Per fissare le idee, supponiamo $s_1 > 0$, al che possiamo, in ogni caso, ricondurci mediante una sostituzione ciclica sulle x_1, x_2, \dots, x_m : sarà allora applicabile al calcolo della forma $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$ la prima delle equazioni fondamentali (4), cioè la

$$(10) \quad s_1 H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m} = \frac{\partial H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}}{\partial x_1} + \sum_{h=1}^n \alpha_h \frac{\partial y_h}{\partial x_1} H_{\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}.$$

Esaminiamo partitamente i vari termini del secondo membro.

Nel primo (supposto che non sia identicamente nullo, vale a dire che non sia $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > s_1 + s_2 + \dots + s_m - 1$) la $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}$, essendo di ordine totale minore di $s_1 + s_2 + \dots + s_m$, soddisfa per ipotesi al teorema; cosicchè, anzitutto, ciascun suo termine comprenderà come fattori α_i derivate implicanti la y_i ($i = 1, 2, \dots, n$); ed è allora manifesto che, derivando rispetto ad x_1 , non si altera in alcun modo codesto numero α_i dei fattori di ciascun termine che portano su y_i . — Quanto poi agli apici parziali, in ciascun termine di $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}$ gli ordini delle varie derivazioni rispetto ad x_1 hanno la somma $s_1 - 1$, talchè, eseguendo, la nuova $\frac{\partial}{\partial x_1}$, ne dedurremo tanti monomi, in ciascuno dei quali la somma degli ordini di derivazione rispetto ad x_1 risulterà aumentato di 1, cioè uguale appunto ad s_1 ; mentre le altre somme s_i degli ordini di derivazione rispetto alle rimanenti x_i ($i = 2, 3, \dots, m$) rimarranno inalterate.

Ad analoga conclusione si perviene per i termini della sommatoria del secondo membro della (10). Considerandone il termine generico

$$(11) \quad \alpha_h \frac{\partial y_h}{\partial x_1} H_{\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m},$$

il quale sarà identicamente nullo solo se è $\alpha_h = 0$, abbiamo ancora che la $H_{\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}$,

essendo di apice totale minore di $s_1 + s_2 + \dots + s_m$, soddisfa, per ipotesi, al nostro teorema. Perciò in ciascun suo termine compariranno, come fattori, $\alpha_b - 1$ derivate implicanti la y_b , cosicchè nel prodotto (11), dovendosi aggiungere il nuovo fattore

$$\frac{\partial y_b}{\partial x_1},$$

che porta pur esso su y_b , si avranno, per ciascun termine, precisamente α_b derivate implicanti la y_b ; mentre ognuna delle altre y_i ($i \geq b$) vi comparirà ancora in α_i derivate come nei singoli termini della $H_{\alpha_1, \dots, \alpha_{b-1}, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}$. Per quanto, poi, riguarda gli apici parziali, è manifesto che il nuovo fattore aumenta di 1 la somma degli ordini di derivazione rispetto ad x_1 , la quale in ciascun termine di $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}$ era $s_1 - 1$ e perciò, nel prodotto (11), diventa uguale ad s_1 ; mentre le somme degli ordini di derivazione rispetto ad x_2, x_3, \dots, x_m rimangono inalterate, cioè ordinatamente uguali ad s_2, s_3, \dots, s_m , quali erano nei singoli termini di $H_{\alpha_1, \dots, \alpha_{b-1}, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}$. Ed il teorema resta, così, stabilito in generale.

Notiamo, come corollario, che: *Per una qualsiasi forma $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$, l'apice totale $s = s_1 + s_2 + \dots + s_m$ dà la somma, costante nei vari termini, di tutti gli ordini di derivazione parziale che, in ciascuno di essi, compaiono.*

5. Il teorema del n° precedente stabilisce alcune relazioni necessarie, che legano gli indici e gli apici parziali di una determinata forma H al numero dei fattori di ciascun suo termine e agli ordini parziali delle derivazioni rispetto alle x_j , che in esso compaiono. Ma non ci dice se fra i termini di H si trovino effettivamente *tutti* i monomi, che è possibile formare subordinatamente alle suaccennate relazioni; e, più in generale, non ci fornisce alcuna notizia circa il coefficiente numerico che, nello sviluppo di H , compete a ciascuno degli indicati monomi che vi compaiono.

Per chiarire questi punti è necessario sottoporre ad una indagine più minuta di quella del n° precedente l'equazione fondamentale (10); e ciò riuscirà agevole, ove, ricorrendo anche al sussidio di una opportuna rappresentazione simbolica, si metta in luce e si indaghi il carattere *combinatorio* della questione.

III.

Algoritmo combinatorio per il calcolo diretto delle forme H .

6. Fissiamo anzitutto una convenzione sul modo di scrivere i singoli termini di una qualsiasi forma H .

Un tal termine è, all'infuori di un coefficiente numerico, un prodotto di derivate

$$(12) \quad \frac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_m} y_b}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_m^{r_m}} \equiv y_b^{(r_1, r_2, \dots, r_m)};$$

e noi conveniamo di mettere in evidenza per ciascun fattore siffatto (modificando, be-

ninteso, corrispondentemente il coefficiente numerico del prodotto) l'inversa del prodotto dei fattoriali dei rispettivi ordini di derivazione parziale

$$\frac{1}{r_1! r_2! \dots r_m!},$$

la quale, in tutti i calcoli seguenti, si considererà come *inseparabile dalla derivata* (12). Così ogni termine di una qualsiasi forma H sarà, all'infuori di un determinato coefficiente numerico, un prodotto di monomi della forma

$$(13) \quad \frac{1}{r_1! r_2! \dots r_m!} \frac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_m} y_b}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_m^{r_m}} \equiv \frac{y_b^{(r_1, r_2, \dots, r_m)}}{r_1! r_2! \dots r_m!}.$$

Ciò posto, noi rappresenteremo un monomio siffatto scrivendo la m^{pla} dei rispettivi ordini parziali, seguita, dopo una barretta verticale, dall'*affisso* h della y_b , su cui porta la derivata considerata ⁸⁾:

$$(14) \quad r_1 r_2 \dots r_m | h.$$

Considerando poi un qualsiasi prodotto di monomi (13), noi ne immagineremo sempre scritti i vari fattori secondo l'ordine crescente o almeno non decrescente, degli *affissi* h delle rispettive y_b ⁹⁾; e rappresenteremo il prodotto considerato mediante lo *schema*, che si ottiene scrivendo ordinatamente in colonna le varie $(m+1)^{\text{le}}$ (14) che rappresentano, secondo quanto si è detto or ora, i singoli fattori. Codesto *schema* ha tante linee quante sono le derivate (distinte od anche uguali) che compaiono come fattori nel prodotto considerato, ed è costituito da una matrice ad m colonne (che nella k^{ma} colonna contiene gli *ordini di derivazione parziale* dei singoli fattori rispetto ad x_k) seguita, dopo una barra verticale, dalla colonna degli *affissi* delle rispettive y_b , in ordine crescente o non decrescente.

Per es. il prodotto relativo al caso $m=4$, $n=2$:

$$(15) \quad \frac{1}{2! 3!} \frac{\partial^6 y_1}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3^3} \frac{1}{2!} \frac{\partial^5 y_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3^2 \partial x_4} \frac{\partial y_2}{\partial x_3},$$

sarà rappresentato dallo schema

$$(16) \quad \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array};$$

il prodotto:

$$\left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^5 y_1}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3} \right)^2 \frac{\partial^4 y_2}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_4}$$

⁸⁾ Per evitare equivoci cogli ordini di derivazione parziale, gli affissi delle y_i , quando si dovranno considerare isolatamente, si segneranno in carattere più marcato.

⁹⁾ È chiaro che codesto ordine risulta determinato solo quando i fattori diversi hanno affissi a due a due differenti; negli altri casi resta arbitraria una sostituzione sui fattori di ciascun prodotto parziale costituito da tutti i monomi considerati (13) che hanno il medesimo affisso.

dallo schema

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

Dato uno schema, tutti quelli che se ne deducono variando di ordine, fra loro, linee aventi il medesimo affisso, rappresentano altrettanti monomi che diversificano solo per l'ordine dei fattori e perciò sono algebricamente identici: tali sono, per. es., lo schema (16) e lo schema ¹⁰⁾

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array},$$

che rappresentano entrambi il medesimo prodotto (15).

Tuttavia nel seguito schemi siffatti, che potremo dire *simili*, si riguarderanno come distinti.

7. Importa notare subito che: *Nello schema che rappresenta, a meno del coefficiente numerico, un termine qualsiasi della forma $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$ non vi può essere nessuna linea, in cui tutti gli m ordini di derivazione parziale, che vi compaiono, siano uguali allo zero; giacchè, come si è notato al n° 1, nei vari termini di $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$ non si incontrerà mai come fattore una funzione y_i , ma soltanto le sue derivate.*

8. Ciò premesso, torniamo al teorema del n° 4. Tenendo conto della rappresentazione mediante *schemi* testè fissata e ricordando l'osservazione del n° precedente, codesto teorema si potrà enunciare nei termini seguenti:

La forma $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$ è una somma di monomi, ciascuno dei quali, all'infuori di un coefficiente numerico (sul quale nulla ancora sappiamo), è rappresentato da uno schema il quale:

- 1) *ha $m + 1$ colonne, compresa l'ultima contenente gli affissi delle y_h ;*
- 2) *ha*

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

linee, di cui alle prime α_1 corrisponde, nell'ultima colonna, l'affisso 1, alle α_2 successive l'affisso 2, ..., alle ultime α_n l'affisso n ;

- 3) *non comprende nessuna linea, i cui primi m elementi siano tutti nulli;*
- 4) *nella k^{ma} colonna ($k = 1, 2, \dots, m$) contiene α numeri interi positivi o nulli (ordini di derivazione parziale rispetto a x_k dei singoli fattori del monomio considerato) la cui somma è uguale ad s_k .*

Per precisare e completare questo teorema nel senso indicato al n° 5, consideriamo l'insieme di *tutti* i possibili *schemi* soddisfacenti alle condizioni 1) — 4) dell'enunciato precedente. Codesto insieme di schemi si otterrà manifestamente in base al seguente:

¹⁰⁾ Si avverta che, date le nostre convenzioni, non è lecito, in un medesimo schema, scambiare fra loro linee di affisso diverso, giacchè in tal modo si viene a distruggere la proprietà, per noi caratteristica, degli schemi di avere i numeri della colonna degli affissi in ordine crescente o, almeno, non decrescente.

Algoritmo combinatorio. — a) Si decomponga, in tutti i possibili modi, ciascuno dei numeri interi (positivi o nulli) s_k ($k = 1, 2, \dots, m$) nella somma di $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ addendi interi (positivi o nulli) e ciascuna di queste partizioni di s_k si faccia variare, secondo tutti gli ordini possibili;

b) Si formino tutte le matrici ad m colonne ed α linee, che si ottengono prendendo come k^{ma} colonna ($k = 1, 2, \dots, m$) una qualsiasi delle partizioni variate di s_k e si escludano quelle matrici in cui compaia una linea (o più) di elementi nulli;

c) Infine a ciascuna delle matrici superstiti si aggiunga la colonna degli affissi, assegnando alle prime α_1 linee l'affisso 1, alle α_2 linee successive l'affisso 2, ..., alle ultime α_n linee l'affisso n .

L'insieme di tutti gli schemi che si ottengono in base al precedente algoritmo si dirà il sistema completo degli schemi appartenenti agli indici ed apici parziali

$$\begin{bmatrix} s_1, & s_2, & \dots, & s_m \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Sappiamo già pel teorema del n° 4, enunciato poc'anzi sotto nuova forma, che nel sistema testè indicato si trova lo schema rappresentativo di ogni termine di $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$; e noi qui ora completeremo codesto risultato, dimostrando il seguente:

TEOREMA. — La forma $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$ è la somma di tutti i monomi rappresentati dai singoli schemi appartenenti ad

$$\begin{bmatrix} s_1, & s_2, & \dots, & s_m \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_n \end{bmatrix},$$

presi ciascuno col coefficiente numerico uguale all'unità ¹¹⁾.

9. Dimostremo anche il teorema or ora enunciato per induzione e perciò cominceremo col constatare direttamente se esso valga per le forme H di apice totale 1 e 2.

In base alle forme (5) (7) (9), vediamo senz'altro che codeste forme ammettono le seguenti rappresentazioni mediante schemi:

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} H_{0, \dots, 1_k, \dots, 0}^{0, \dots, 1_k, \dots, 0} \sim 00 \dots 1_k \dots 0 | h; \\ H_{0, \dots, 2_k, \dots, 0}^{0, \dots, 2_k, \dots, 0} \sim 00 \dots 1_k \dots 0 | h, \quad H_{0, \dots, 2_k, \dots, 0}^{0, \dots, 2_k, \dots, 0} \sim 00 \dots 1_k \dots 0 | h \\ \quad \quad \quad 00 \dots 1_k \dots 0 | h, \quad \quad \quad 00 \dots 1_k \dots 0 | i, \\ H_{0, \dots, 1_k, \dots, 1_j, \dots, 0}^{0, \dots, 1_k, \dots, 1_j, \dots, 0} \sim 00 \dots 1_k \dots 0 \dots 0 | h + 00 \dots 0 \dots 1_j \dots 0 | h \\ \quad \quad \quad 00 \dots 0 \dots 1_j \dots 0 | h + 00 \dots 1_k \dots 0 \dots 0 | h, \\ H_{0, \dots, 1_k, \dots, 1_j, \dots, 0}^{0, \dots, 1_k, \dots, 1_j, \dots, 0} \sim 0 \dots 1_k \dots 0 \dots 0 | h + 0 \dots 0 \dots 1_j \dots 0 | h \\ \quad \quad \quad 0 \dots 0 \dots 1_j \dots 0 | i + 0 \dots 1_k \dots 0 \dots 0 | i; \end{array} \right.$$

$$(18) H_{0, \dots, 2_k, \dots, 0}^{0, \dots, 2_k, \dots, 0} \sim 00 \dots 2_k \dots 0 | h, \quad H_{0, \dots, 1_k, \dots, 1_j, \dots, 0}^{0, \dots, 1_k, \dots, 1_j, \dots, 0} \sim 0 \dots 1_k \dots 1_j \dots 0 | h.$$

¹¹⁾ Beninteso, noi chiamiamo anche qui *coefficiente numerico* di un monomio, prodotto di derivate, quello che vi compare quando, secondo il n° 6, si riguardi come inseparabile da ciascuna derivata il prodotto delle inverse dei fattoriali dei rispettivi ordini parziali di derivazione.

Ora, se si tien presente l'algoritmo fissato al n° precedente., basta un rapido esame a codeste rappresentazioni schematiche per convincersi che ognuna delle H di apice totale 1 o 2 si ottiene effettivamente sommando, con coefficiente numerico uguale all'unità, i monomi rappresentati da *tutti* (e soli) gli *schemi* appartenenti ai rispettivi indici od apici parziali ¹²⁾.

10. Dopo la verifica del n° precedente, basterà stabilire il teorema per una qualsiasi $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$, nell'ipotesi che esso sia valido per tutte le forme di apice totale minore di

$$s = s_1 + s_2 + \dots + s_m.$$

Supporremo anche qui, per fissare le idee (cfr. n° 4), $s_1 > 0$, talchè potremo ancora valerci, per la determinazione di $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$, della prima delle equazioni fondamentali (4), cioè della

$$(19) \quad s_1 H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m} = - \frac{\partial H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}}{\partial \alpha_1} + \sum_h^h \alpha_h y_h^{(1, 0, \dots, 0)} H_{\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}.$$

Ora, noi operemo qui sistematicamente sugli *schemi*, cosicchè dovremo dimostrare che se nel secondo membro della (19) si sostituiscono in luogo di

$$H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}, \quad H_{\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

rispettivamente e successivamente *tutti* gli *schemi* appartenenti ad

$$\left[\begin{matrix} s_1 - 1, & s_2, & \dots, & s_m \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_n \end{matrix} \right], \quad \left[\begin{matrix} s_1 - 1, & s_2, & \dots, & s_m \\ \alpha_1, & \dots, & \alpha_{h-1}, & \dots, & \alpha_n \end{matrix} \right] \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

e su codesti *schemi* si eseguiscano le operazioni combinatorie indicate al secondo membro della (19), si ottengono:

1) *soltanto* schemi appartenenti ad

$$\left[\begin{matrix} s_1, & s_2, & \dots, & s_m \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_n \end{matrix} \right];$$

2) *tutti* gli schemi siffatti, e ciascuno ripetuto s_1 volte.

La prima di queste tesi è già stata dimostrata, pur senza ricorrere alla rappresen-

¹²⁾ Converrà fissare l'attenzione particolarmente sui due tipi di forme H di apice totale 2, il cui sistema completo di *schemi* non si riduce ad un solo schema, ma a due [terza e quarta delle H (17)]. Nel primo di codesti due tipi il sistema completo è costituito da due schemi simili, talchè la H corrispondente risulta monomia e col coefficiente 2. Avverto poi, per quanto possa essere oramai superfluo, che, nella rappresentazione schematica della prima delle (18), all'unico schema compete il coefficiente numerico 1, in quanto il fattore $\frac{1}{2}$, che compare nella espressione esplicita di codesta H [cfr. la (9) del n° 2], è il fattore *inseparabile*, secondo il n° 6, dalla

$$\frac{\partial^2 \gamma_h}{\partial x_k^2}.$$

tazione schematica, al n° 4: cosicchè resta soltanto da stabilire la seconda.

A tale scopo è necessario fissare un modo determinato di eseguire le operazioni combinatorie indicate dalla sommatoria del secondo membro della (19).

Considerato il termine generico di codesta sommatoria

$$(20) \quad \alpha_b y_b^{(1,0,\dots,0)} H_{\alpha_1,\dots,\alpha_{b-1},\dots,\alpha_n}^{s_1-1,s_2,\dots,s_m},$$

ricordiamo che gli schemi dei termini di $H_{\alpha_1,\dots,\alpha_{b-1},\dots,\alpha_n}^{s_1-1,s_2,\dots,s_m}$ (i quali nel loro insieme danno, per ipotesi, il *sistema completo degli schemi appartenenti ad* $[\alpha_1-1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$) hanno ciascuno $\alpha_b - 1$ linee di affisso \mathbf{n} (n° 8) e precisamente le linee dalla $(\alpha_1 + \dots + \alpha_{b-1} + 1)^{\text{ma}}$ alla $(\alpha_1 + \dots + \alpha_b - 1)^{\text{na}}$; cosicchè queste linee offrono fra loro, in tutto, α_b intervalli, se contiamo anche l'intervallo (o posto per $b = 1$) che le precede tutte e l'intervallo (o posto per $b = n$) che le segue.

Ciò premesso, notiamo che la derivata $y_b^{(1,0,\dots,0)}$ che l'espressione (20) introduce come nuovo fattore in ciascun termine di $H_{\alpha_1,\dots,\alpha_{b-1},\dots,\alpha_n}^{s_1-1,s_2,\dots,s_m}$, è rappresentato dalla linea

$$(21) \quad 1 \ 0 \ \dots \ 0 | \mathbf{n},$$

cosicchè la (20) porta a contare α_b volte ciascuno degli *schemi* che si ottengono aggiungendo ad ogni schema di $H_{\alpha_1,\dots,\alpha_{b-1},\dots,\alpha_n}^{s_1-1,s_2,\dots,s_m}$ una sola volta la nuova linea (21) fra le linee di affisso \mathbf{n} . Riesce allora manifestamente legittima la convenzione di eseguire le operazioni indicate dalla (20), inserendo la nuova linea (21) in ogni *schema* di $H_{\alpha_1,\dots,\alpha_{b-1},\dots,\alpha_n}^{s_1-1,s_2,\dots,s_m}$ successivamente in *ciascuno* degli α_b intervalli che in esso presentano le $\alpha_b - 1$ linee di affisso \mathbf{n} .

Fissata questa convenzione, torniamo alla nostra $H_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}^{s_1,s_2,\dots,s_m}$ che compare al primo membro della (19) e ricordiamo che il suo indice totale

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

può avere uno qualsiasi dei valori interi positivi non superiori all'ordine totale $s = s_1 + s_2 + \dots + s_m$ (n° 3).

Noi discuteremo partitamente i tre casi;

$$\alpha = 1; \quad \alpha = s; \quad 1 < \alpha < s.$$

II. $\alpha = 1$.

Sotto questa ipotesi, gli indici parziali della nostra H , di ordine totale s , saranno tutti nulli, salvo uno che sarà uguale all'unità; sia questo l' i^{mo} , cioè consideriamo la forma $H_{0,\dots,1_i,\dots,0}^{s_1,s_2,\dots,s_m}$.

In questo caso tutte le H , che compaiono nella sommatoria del secondo membro della (19), sono identicamente nulle (n° 2), talchè codesta formola fondamentale si riduce ad

$$(22) \quad s_1 H_{0,\dots,1_i,\dots,0}^{s_1,s_2,\dots,s_m} = \frac{\partial H_{0,\dots,1_i,\dots,0}^{s_1-1,s_2,\dots,s_m}}{\partial x_i};$$

e, in base a questa, è facile verificare direttamente la validità del nostro teorema, nella presente ipotesi particolare.

Per calcolare effettivamente la $H_{0, \dots, 1_i, \dots, 0}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}$, che essendo di apice totale $s-1$, soddisfa per ipotesi al nostro teorema, notiamo che ad

$$\left[\begin{array}{c} s_1 - 1, s_2, \dots, s_m \\ 0, 0, \dots, 1_i, \dots, 0 \end{array} \right]$$

appartiene, in base all'algoritmo del n° 8, l'unico schema

$$s_1 - 1 \quad s_2 \dots s_m \mid i,$$

talchè avremo

$$H_{0, \dots, 1_i, \dots, 0}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m} = \frac{y_i^{(s_1-1, s_2, \dots, s_m)}}{(s_1-1)! s_2! \dots s_m!}.$$

Applicando allora la (22), troviamo

$$s_1 H_{0, \dots, 1_i, \dots, 0}^{s_1, s_2, \dots, s_m} = \frac{y_i^{(s_1, s_2, \dots, s_m)}}{(s_1-1)! s_2! \dots s_m!},$$

ossia

$$H_{0, \dots, 1_i, \dots, 0}^{s_1, s_2, \dots, s_m} = \frac{y_i^{(s_1, s_2, \dots, s_m)}}{s_1! s_2! \dots s_m!};$$

e quest'ultima H monomia è rappresentata appunto dallo schema

$$s_1 s_2 \dots s_m \mid i,$$

che è evidentemente l'unico appartenente ad

$$\left[\begin{array}{c} s_1, s_2, \dots, s_m \\ 0, 0, \dots, 1_i, \dots, 0 \end{array} \right];$$

cosicchè il teorema risulta, in questo caso, verificato.

12. $\alpha = s$.

In tale ipotesi, avendosi

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > s_1 + s_2 + \dots + s_m - 1,$$

si annulla identicamente (n° 2) il primo termine del secondo membro della (19), la quale, perciò, si riduce ad

$$(23) \quad s_1 H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m} = \sum_h^n \alpha_h y_h^{(1, 0, \dots, 0)} H_{\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}.$$

1) Qui è anzitutto necessario fermar l'attenzione sulla forma degli *schemi* appartenenti ad una n^{pla} di indici e ad una m^{pla} di apici, tali che l'indice totale sia identico all'apice totale; poichè sono di tal fatta gli *schemi* di tutte le H , che, in questo caso, compaiono nella (23), tanto nel primo, quanto nel secondo membro.

Riferendoci, per fissare le idee, agli *schemi* appartenenti ad

$$(24) \quad \left[\begin{array}{c} s_1, s_2, \dots, s_m \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \end{array} \right]$$

e designandoli genericamente, per brevità, con S , abbiamo che nella matrice (delle prime

m colonne) di ogni S il numero $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ delle linee è uguale all'apice totale $s = s_1 + s_2 + \dots + s_m$, che dà (corollario del n° 4) la somma di tutti gli elementi della matrice stessa, cosicchè, non potendosi avere in una stessa linea m elementi nulli (n° 7), si conclude che in ogni linea si avranno $m - 1$ elementi nulli ed uno uguale all'unità. Precisamente la matrice di ogni S sarà composta di s_1 linee della forma

$$\begin{aligned} (25) \quad & \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0; \\ & 0 & 1 & 0 & \dots & 0; \text{ etc.}, \\ & & 0 & 0 & 0 & \dots & 1. \end{array} \\ & \text{di } s_2 \text{ linee della forma} \\ & \text{di } s_m \text{ linee della forma} \end{aligned}$$

Naturalmente codeste $s (= \alpha)$ linee, nelle matrici dei vari *schemi* S , saranno fra loro intercalate e ordinate in ogni modo possibile (*algoritmo* del n° 9) ¹³, cosicchè, per es., in un S determinato, delle s_1 linee (25) un certo numero t_1 avranno l'*affisso* 1 (cioè si troveranno fra le prime α_1 linee dello *schema*), altre t_2 avranno l'*affisso* 2 (si troveranno fra le successive α_2 linee di S), etc., le ultime t_n avranno l'*affisso* n (si troveranno fra le ultime α_n linee di S); e in ogni caso avremo

$$(26) \quad t_1 + t_2 + \dots + t_n = s_1.$$

Osservazioni analoghe varranno per gli *schemi* $S_{(h)}$ appartenenti ad

$$(27) \quad \left[\begin{array}{c} s_1, s_2, \dots, s_m \\ \alpha_1, \dots, \alpha_h - 1, \dots, \alpha_n \end{array} \right] \quad (h = 1, 2, \dots, m)$$

i quali, oltracciò, rappresentano, per ipotesi, tutti e soli i termini dello sviluppo della corrispondente $H_{\alpha_1, \dots, \alpha_h - 1, \dots, \alpha_n}^{s_1 - 1, s_2, \dots, s_m}$.

b) Premesse codeste osservazioni, riesce ormai agevole dimostrare che se, in base all'equazione fondamentale (23), si eseguiscano le operazioni combinatorie indicate al secondo membro sui vari sistemi completi di *schemi* $S_{(h)}$ appartenenti a (27), si ottengono *tutti* gli *schemi* S appartenenti a (24), *ripetuti ciascuno s_1 volte*.

Si ricordi, invero, che al secondo membro di (23) il termine generico

$$(28) \quad \alpha_h y_h^{(1, 0, \dots, 0)} H_{\alpha_1, \dots, \alpha_h - 1, \dots, \alpha_n}^{s_1 - 1, s_2, \dots, s_m}$$

conduce ad inserire la nuova linea

$$(29) \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \mid h$$

in ogni *schema* $S_{(h)}$, successivamente in *ciascuno* degli α_h intervalli offerti dalle $\alpha_h - 1$ sue linee di *affisso* h (n° 10).

¹³) Risulta di qui che gli *schemi* S appartenenti a (24) sono in numero di

$$\frac{(s_1 + s_2 + \dots + s_m)!}{s_1! s_2! \dots s_m!}.$$

Considerato, allora, un determinato schema S appartenente a (24), indichiamo, come pocanzi, con t_h il numero delle linee della forma (29) che esso contiene [in guisa che sussista la (26)]. Se in S sopprimiamo la prima, o la seconda, ..., o la t_h^{ma} delle t_h linee (29), diminuiamo simultaneamente di 1 il primo apice parziale e l' h^{mo} indice parziale, cosicchè otteniamo, rispettivamente, certi t_h schemi $S_{(h)}^{(l)}$ ($l = 1, 2, \dots, t_h$) di $H_{\alpha_1, \dots, \alpha_h-1, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}$ ¹⁴⁾; mentre, invece, se in S sopprimiamo una linea diversa dalle (29), troviamo uno schema di una $H_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \dots, \alpha_n}^{s_1, \dots, s_{h-1}, \dots, s_m}$, dove sarà o $k > 1$, o $i \geq h$ o $k > 1$ e $i \geq h$ ¹⁵⁾.

Ora, invertendo la considerazione, quando eseguiamo le operazioni indicate da (28), verrà il momento, in cui, fra gli schemi di $H_{\alpha_1, \dots, \alpha_h-1, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}$, incontreremo anche i t_h schemi $S_{(h)}^{(l)}$, dianzi definiti; e in ognuno di essi dovremo inserire una nuova linea (29) successivamente in ciascuno degli α_h intervalli relativi alle linee di affisso h e quindi, in particolare, in quello, in cui si era dianzi soppressa in S una linea (29) per ottenere lo schema $S_{(h)}^{(l)}$ considerato. Si ricostruisce così il primitivo schema S t_h volte, e non più; giacchè tutte le altre operazioni indicate da (28) o portano su di uno schema di $H_{\alpha_1, \dots, \alpha_h-1, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}$, diverso dagli $S_{(h)}^{(l)}$ o, pur portando su di uno schema $S_{(h)}^{(l)}$, conducono ad inserirvi una nuova linea (29) in un intervallo diverso da quello dove si è soppressa in S la (29) per dedurne $S_{(h)}^{(l)}$.

Abbiamo, dunque, che il termine generico (28) del secondo membro dell'equazione fondamentale (23) fornisce lo schema S t_h volte; onde, tenendo conto di tutti i termini, concludiamo che al secondo membro della (23) lo schema S si ottiene precisamente tante volte, quante sono le unità di

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n,$$

cioè appunto, in base alla (26), s_1 volte, come si doveva dimostrare ¹⁶⁾.

13. $1 < \alpha < s$.

In questo caso nessuno dei termini al secondo membro della equazione fondamentale

$$(19) \quad s_1 H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m} = \frac{\partial H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}}{\partial x_1} + \sum_1^n \alpha_h y_h^{(1, 0, \dots, 0)} H_{\alpha_1, \dots, \alpha_h-1, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}$$

¹⁴⁾ Si noti che può darsi benissimo che codesti t_h schemi $S_{(h)}^{(l)}$ non siano tutti diversi. Ma se ve ne sono due (o più) di identici [il che accade se in S vi sono due (o più) linee (29) contigue] è, per altro, diverso dall'uno all'altro il posto della linea (29) soppressa per dedurli da S .

¹⁵⁾ Si osservi che le linee di S diverse dalle t_h (29) sono della forma

$$0 \ 0 \ \dots \ 1_k \ \dots \ 0 \ | \ i$$

dove è o $k > 1$, o $i \geq h$, o $k > 1$ e $i \geq h$.

¹⁶⁾ A riprova di codesto risultato può valere un computo numerico. Uguagliando il numero degli schemi che si ottengono nei due membri della (23), si trova in questo caso [cfr. la nota ¹³⁾] l'uguaglianza

$$s_1 \frac{s!}{s_1! s_2! \dots s_m!} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \frac{(s-1)!}{(s_1-1)! s_2! \dots s_m!},$$

la quale, per la ipotesi $\alpha = s$, si riduce ad una identità.

è necessariamente nullo, onde bisogna tener conto dell'effetto di ciascuno di essi.

a) Cominciamo dallo studiare quali modificazioni apporti su di uno schema qualsiasi S la $\frac{\partial}{\partial x_i}$, applicata al monomio rappresentato da S .

Uno schema S ad α linee e ad $m + 1$ colonne (compresa quella degli *affissi*) rappresenta un prodotto π di α fattori della forma

$$(30) \quad \frac{y_i^{(p_j, q_j, \dots, u_j)}}{p_j! q_j! \dots u_j!}, \quad (j = 1, 2, \dots, \alpha)$$

e la

$$p_j q_j \dots u_j | i$$

è precisamente la linea generica del nostro schema.

Se noi deriviamo π rispetto ad x_i , otteniamo, com'è troppo noto, la somma di α prodotti ¹⁷⁾, ciascuno dei quali si può immaginare ottenuto da π , sostituendovi ad uno dei fattori, per es. a (30), il nuovo monomio

$$\frac{y_i^{(p_{j+1}, q_j, \dots, u_j)}}{p_j! q_j! \dots u_j!},$$

il quale, secondo la nostra convenzione sul divisore inseparabile da ogni derivata (n° 6), andrà scritto

$$(p_j + 1) \frac{y_i^{(p_{j+1}, q_j, \dots, u_j)}}{(p_j + 1)! q_j! \dots u_j!}.$$

Passando allora agli schemi, possiamo dire brevemente che il risultato della $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sullo schema S è la somma degli schemi che si ottengono dal dato, aumentando di 1 il primo, o il secondo, ..., o l' α^{mo} elemento della prima colonna e, se p_j è l'elemento aumentato, prendendo il nuovo schema, così formato, $p_j + 1$ volte.

b) Ciò premesso, prefissiamo un qualsiasi schema S , appartenente ad

$$\left[\begin{array}{c} s_1, s_2, \dots, s_m \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \end{array} \right]$$

e proponiamoci di dimostrare che, eseguendo le operazioni indicate al secondo membro dell'equazione fondamentale (19), esso si ottiene esattamente s_i volte.

A tale scopo distinguiamo le linee di S in *tre specie*:

1) le linee che hanno il primo elemento *nullo*;

2) le linee della forma

$$1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 | h; \quad (h = 1 \ 0 \ 2, \dots, 0 \ n)$$

e queste siano in numero di r ;

3) tutte le altre linee; e di queste indichiamo i primi elementi con $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots$, tutti maggiori di zero.

¹⁷⁾ Se fra i fattori di π ve ne sono di uguali, conviene immaginarli scritti l'uno di seguito all'altro, senza raccogliarli sotto un segno di potenza; e ciò in accordo colla rappresentazione schematica, nella quale essi danno luogo ad altrettante linee, uguali fra loro ma distinte.

Naturalmente le linee di codeste tre specie si susseguiranno in S , intercalate fra loro in un ordine qualsiasi; ma di ciò non occorre qui interessarci.

Importa, invece, rilevare che, per la proprietà caratteristica degli apici parziali [n° 8; teor. 4)], si avrà

$$(31) \quad \sum p_j + r = s_1.$$

Ora se nello *schema* S diminuiamo di 1 il primo elemento p_j di una qualsiasi linea della terza specie, veniamo a diminuire di 1 il primo apice parziale, mentre lasciamo inalterati gli altri apici parziali e tutti gli indici parziali, cioè otteniamo un certo determinato schema S_j ¹⁸⁾ appartenente ad

$$\begin{bmatrix} s_1 - 1, s_2, \dots, s_m \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \end{bmatrix}$$

e che, per ipotesi, rappresenta uno dei termini di $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}$.

Se allora immaginiamo di eseguire le operazioni indicate dal primo termine del secondo membro di (19)

$$(32) \quad \frac{\partial H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}}{\partial x_1}$$

verrà il momento in cui, fra gli schemi di $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}$, incontreremo anche i singoli schemi S_j definiti pocanzi; e in ognuno di essi, per eseguire la $\frac{\partial}{\partial x_1}$, dovremo aumentare di 1 successivamente il primo elemento di *tutte* le linee c , quindi, in particolare di quella che comincia con $p_j - 1$. Ritroviamo così, fra i termini della derivata di S_j , il nostro *schema* S , che, pel comma a) di questo stesso numero, va qui contato p_j volte; talchè, tenendo conto di tutti gli S_j , otterremo lo *schema* S tante volte quante sono le unità di

$$\sum p_j.$$

Nè è possibile che, eseguendo le operazioni indicate da (32), si ritrovi S in altri modi oltre quelli testè considerati. Si osservi invero che, nella derivata rispetto ad x_1 dello schema S_j , gli $\alpha - 1$ *schemi* che si ottengono, oltre quel $p_j S$ di cui abbiamo tenuto conto or ora, diversificano da S , quanto meno, per l'elemento $p_j - 1$ che persiste in ciascuno di essi. D'altra parte è manifesto, pel modo da noi tenuto nel definire gli S_j , che questi sono i *soliti schemi* di $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1-1, s_2, \dots, s_m}$ che possano avere il nostro schema S fra i termini della loro derivata rispetto ad x_1 ¹⁹⁾.

¹⁸⁾ Notiamo che, qui, gli S_j sono fra loro tutti distinti, per quanto non necessariamente dissimili.

¹⁹⁾ Se, cercando di costruire schemi la cui derivata rispetto ad x_1 contenesse fra i suoi termini il nostro S , si diminuisse di 1 il primo elemento di una linea di prima o seconda specie, non si otterrebbe più uno *schema*, giacchè o si introdurrebbe un elemento negativo -1 o si perverrebbe ad una linea con m elementi nulli. Forse a questo punto della nostra discussione si sarebbe potuto dare una forma più sistematica, parlando, oltre che di *derivazione*, anche di *integrazione* (parziale) di *schemi*. Ma mi è sembrato più opportuno di non aggravare ulteriormente il bagaglio, certo non lieve, di locuzioni e di simboli che ho già dovuto, mio malgrado, introdurre in questa Nota.

c) Non resta più che da considerare la sommatoria del secondo membro della equazione fondamentale (19)

$$(33) \quad \sum_b^n \alpha_b y_b^{(1,0,\dots,0)} H_{\alpha_1,\dots,\alpha_{b-1},\dots,\alpha_n}^{s_1-1,s_2,\dots,s_m}.$$

Qui possiamo procedere rapidamente, in quanto occorrono considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte, nell'ipotesi $\alpha = s$, al n° precedente. Infatti, il termine generico della (33) porta ad inserire una nuova linea

$$(34) \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \mid h \quad (h = 1, 0, 2, \dots, 0, n)$$

in ogni schema di $H_{\alpha_1,\dots,\alpha_{b-1},\dots,\alpha_n}^{s_1-1,s_2,\dots,s_m}$ in ciascuno degli α_b intervalli che esso presenta fra le sue linee di affisso h . Risulta di qui che, per effetto di (34), lo schema S si ritroverà complessivamente tante volte quanti sono i vari modi possibili di dedurre da S uno schema appartenente ad una qualsiasi delle $H_{\alpha_1,\dots,\alpha_{b-1},\dots,\alpha_n}^{s_1-1,s_2,\dots,s_m}$, mediante la soppressione di una linea della forma (34) o, come dicemmo al precedente *comma b*), di una linea di seconda specie. Codeste linee in S sono, per ipotesi, in numero di r ; talchè, tenendo conto anche del risultato stabilito pocanzi (precedente *comma b*), concludiamo che, eseguendo le operazioni indicate al secondo membro della equazione fondamentale (19), un qualsiasi schema S appartenente ad $\left[\begin{smallmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{smallmatrix} \right]$ si ottiene, in tutto, tante volte quante sono le unità di

$$\sum p_j + r,$$

cioè appunto, in base alla (31), s_1 volte; cosicchè il teorema del n° 8 rimane stabilito in tutta la sua generalità.

14. Il teorema così dimostrato riduce il *calcolo diretto di una qualsivoglia forma* H e, quindi, di una qualsiasi derivata di una funzione composta di quante si vogliano variabili intermedie ed indipendenti, alla applicazione dell'*algoritmo combinatorio* fissato al n° 8.

Non sarà, forse, fuor di luogo lo sperimentare la praticità del risultato, applicando il procedimento ad un caso concreto. Si voglia, per es., calcolare la $H_{2,0,1}^{3,1}$, vale a dire la forma differenziale che nello sviluppo di

$$\frac{1}{3!} \frac{\partial^4 \gamma}{\partial x_1^3 \partial x_2}$$

moltiplica

$$\frac{1}{2!} \frac{\partial^3 \gamma}{\partial y_1^2 \partial y_3}.$$

Abbiamo qui:

$$m = 2, \quad n = 3; \quad s_1 = 3, \quad s_2 = 1, \quad s = 4; \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha = 3.$$

cosicchè gli schemi avranno tre colonne (compresa quella degli affissi) e tre linee.

Dobbiamo anzitutto costruire tutte le *partizioni variate* in 3 addendi (positivi o nulli) dei numeri 3 ed 1; ma notiamo subito che, essendovi in ogni siffatta partizione

di 1 *due zeri*, potremo senz'altro escludere le partizioni di 3 che contengono *due zeri*, in quanto queste, combinate con le prime, darebbero luogo in ogni caso a matrici aventi una linea di elementi nulli e, perciò, da rifiutarsi [*algoritmo*; *b*)].

Restano così per il numero 3 le *partizioni variate* seguenti (delle quali scriviamo subito gli addendi in colonna):

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

mentre per il numero 1 abbiamo:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Combinando, in matrici a due colonne, ciascuna delle prime partizioni con ciascuna delle seconde ed escludendo le matrici aventi una linea di due zeri, troviamo le matrici

$$(35) \quad \begin{cases} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{cases}$$

Non resta più che assegnare gli *affissi* alle varie linee in ciascuna matrice, secondo gli *indici parziali* $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; cioè dobbiamo dare alle due prime linee l'*affisso* 1, alla terza l'*affisso* 3. Otteniamo così il seguente *sistema completo di schemi*:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} & \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{array} & \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} & \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{array} & \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} & \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{array} & \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \end{array}$$

Traducendo, infine, i singoli schemi nei monomi corrispondenti e riducendo i termini simili, troviamo:

$$\begin{aligned} H_{2,0,1}^{3,1} &= 2 \frac{y_1^{(2,0)} y_1^{(1,0)} y_3^{(0,1)}}{2!} + 2 \frac{y_1^{(2,0)} y_1^{(0,1)} y_3^{(1,0)}}{2!} \\ &+ 2 \frac{y_1^{(1,0)} y_1^{(0,1)} y_3^{(2,0)}}{2!} + 2 y_1^{(1,1)} y_1^{(1,0)} y_3^{(1,0)} + y_1^{(1,0)2} y_3^{(1,1)}. \end{aligned}$$

15. Se teniamo presenti le varie operazioni dell'algoritmo del n° 8, vediamo che la costruzione delle matrici per il calcolo di una prefissata forma H [operazioni a) b) dell'algoritmo] dipende esclusivamente dagli apici parziali s_k e dall'indice totale α ; mentre gli indici parziali α_b e, quindi, lo stesso numero n delle variabili intermedie y_i determinano soltanto gli affissi che in ciascuna matrice competono alle singole linee [operazione c) dell'algoritmo].

Si può quindi affermare che, dal punto di vista combinatorio, la difficoltà del problema della derivazione successiva delle funzioni composte dipende dal numero m delle variabili indipendenti x_j , non dal numero n delle variabili intermedie o funzioni componenti y_i .

Così, in particolare, riferendoci all'esempio considerato nel n° precedente, avremo che il medesimo sistema di matrici (35), costruite pel calcolo di $H_{2,0,1}^{3,1}$, serve pure ad assegnare, pressochè immediatamente, le espressioni: della forma in una sola variabile intermedia $H_3^{3,1}$; delle forme in due variabili intermedie $H_{3,0}^{3,1}$, $H_{2,1}^{3,1}$, $H_{1,2}^{3,1}$, $H_{0,3}^{3,1}$; etc.; delle forme in n variabili intermedie $H_{3,0,\dots,0}^{3,1}$, $H_{2,1,0,\dots,0}^{3,1}$, e così via. Dall'una all'altra di di queste forme non varia che la colonna degli affissi (comune in ciascun caso a tutti gli schemi del sistema).

Si ha così:

$$H_3^{3,1} = 6 \frac{y^{(2,0)} y^{(1,0)} y^{(0,1)}}{2!} + 3 y^{(1,1)} y^{(1,0)^2}, \text{ etc.}$$

Risulta dall'operazione precedente che in tutte le forme H (nello stesso numero di variabili indipendenti) aventi ordinatamente i medesimi apici parziali e il medesimo indice totale, la somma dei coefficienti numerici dei vari termini ⁽¹⁾ è la stessa, qualunque sia il numero delle variabili intermedie e comunque siano distribuite fra i vari indici parziali le unità dell'indice totale.

16. Consideriamo, qui da ultimo, due casi particolari del nostro problema generale.

a) Sia, in primo luogo, m qualsiasi ed $n = 1$, cioè consideriamo una funzione χ di una variabile y , che sia funzione di m variabili x^j .

In tal caso le forme H hanno un unico indice e la nostra formola (3) diventa

$$\frac{1}{s_1! s_2! \dots s_m!} \frac{\partial^{s_1+s_2+\dots+s_m} \chi}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \dots \partial x_m^{s_m}} = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \frac{d^{\alpha} \chi}{d y^{\alpha}} H_{\alpha}^{s_1, s_2, \dots, s_m} \quad [s = s_1 + s_2 + \dots + s_m].$$

Sulle forme $H_{\alpha}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$, direttamente definite dal teorema e dall'algoritmo del n° 8, non vi è luogo ad aggiungere nulla di particolare, giacchè, come risulta dal n° precedente, il problema della costruzione delle $H_{\alpha}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$ è, dal punto di vista combinatorio, equivalente all'analogo problema pel caso più generale possibile di una funzione χ di quante si vogliono funzioni di m variabili indipendenti.

b) Sia, in secondo luogo, n qualsiasi ed $m = 1$, cioè consideriamo una funzione χ di n funzioni y_i di una sola variabile indipendente x .

Qui le forme H avranno un solo apice e la equazione (3) diventerà

$$\frac{1}{s!} \frac{d^s \chi}{d x^s} = \sum \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} \chi}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \dots \partial y_n^{\alpha_n}} H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_n} \quad [\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq s].$$

In questo caso, secondo il n° 8, la forma $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^s$ è la somma di tutti i monomi che si ottengono moltiplicando fra loro α_1 derivate (rispetto ad x) di y_1 , α_2 derivate di y_2 , ..., α_n derivate di y_n ; assumendo per codeste derivate, come ordini di derivazione, ordinatamente e successivamente, gli elementi di ciascuna delle possibili partizioni variate del numero s in $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ addendi interi e positivi ²⁰⁾; dividendo, infine, ciascuna derivata per il fattoriale del rispettivo ordine di derivazione.

Questo risultato coincide con quello ottenuto da F. MOSSA per diversa via ⁴⁾ e, come forse non sarà inutile il rilevare, fornisce anche l'espressione del differenziale s^{mo} di una qualsiasi funzione $z(y_1, y_2, \dots, y_n)$ per mezzo dei differenziali successivi (fino all'ordine s) delle y_i , quando non si introduca la consueta ipotesi convenzionale che i differenziali primi delle y_i siano indipendenti dalle y_i medesime.

Per l'osservazione del n° precedente, il problema della determinazione delle $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^s$ è, dal punto di vista combinatorio, equivalente al problema analogo nel caso $m = n = 1$, cioè nel caso di una funzione di funzione di una sola variabile.

Qui le forme H hanno un solo indice ed un solo apice; e si ha

$$\frac{1}{s!} \frac{d^s z}{dx^s} = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \frac{d^{\alpha} z}{dy^{\alpha}} H_{\alpha}^s,$$

dove H_{α}^s è la somma di tutti i prodotti di α fattori

$$\frac{y^{(r_i)}}{r_i!} \quad (i = 1, 2, \dots, \alpha),$$

che si ottengono prendendo per $r_1, r_2, \dots, r_{\alpha}$ tutte le possibili partizioni variate del numero s in α addendi interi e positivi.

È questa la formola di A. FAIS ³⁾, dimostrata direttamente dal CESÀRO ²¹⁾.

17. L'algoritmo combinatorio del n° 8, fa sorgere naturalmente le seguenti domande:

Quanti sono gli *schemi* appartenenti ad $\left[\begin{smallmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{smallmatrix} \right]$?

Quanti sono i termini (dissimili) di $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$?

Ma, mentre è immediata la risposta in taluni casi particolari, non par facile trovare le formole valide in ogni caso possibile.

Più agevole, invece, sarebbe l'indagine delle relazioni, cui dà luogo, fra le diverse forme H , la molteplicità dei modi, in cui una medesima forma siffatta si può calcolare (n° 2) in base alle equazioni fondamentali (4), per le quali, da questo punto di vista,

²⁰⁾ Si ricordi che, in base all'algoritmo del n° 8, nell'unica colonna della matrice dello schema di $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m}$ non vi deve essere nessun elemento nullo.

²¹⁾ Il CESÀRO designa la somma di prodotti H_{α}^s col simbolo $\sum_s \frac{y^{(r)}}{r!}$.

converrebbe, tenendo conto delle (5), adottare la forma

$$s_k H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, s_2, \dots, s_m} = \frac{\partial H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{s_1, \dots, s_{k-1}, \dots, s_m}}{\partial x_k} + \sum_1^n \alpha_h H_{\alpha_1, \dots, \alpha_h, \dots, \alpha_n}^{0, \dots, 1_k, \dots, 0} H_{\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, \dots, \alpha_n}^{s_1, \dots, s_{k-1}, \dots, s_m};$$

onde si rileva un indizio di una probabile legge addittiva degli indici e degli apici parziali delle H .

Ma rimanderemo ciò ad altra eventuale occasione, quando sia possibile, come io credo, applicare l'algoritmo indicato in questa Nota a qualche questione concreta.

Carpaneto (Piacenza), settembre 1916.

UGO AMALDI.

DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE D'ORDINE 6 CON UN FASCIO DI CUBICHE ELLITTICHE.

Nota di **Giuseppe Marletta** (Catania).

Adunanza del 12 novembre 1916.

Scopo di questa Nota è di classificare le superficie algebriche, dell' S_3 , d'ordine $n = 6$, con un fascio di cubiche ellittiche i cui piani costituiscano un fascio. Essa, dunque, insieme con una mia Nota precedente ¹⁾, completa la classificazione delle superficie siffatte.

Nel § 1 si troverà, inoltre, qualche teorema riguardante le superficie con un fascio di cubiche ellittiche, qualunque sia il loro ordine e qualunque sia la classe dell'involuppo costituito dai piani di queste.

§ 1.

1. Si stabilisca un'omografia tra le cubiche di un piano τ e i punti dell' S_9 .

Alle cubiche di τ dotate di punto doppio corrispondono i punti di un'ipersuperficie Φ d'ordine 12; alle cubiche ognuna costituita da una retta tripla, corrispondono i punti di una superficie ψ di Φ ; e infine alle cubiche ognuna spezzata in due rette delle quali una doppia, corrispondono i punti di una varietà ψ' , di Φ , a quattro dimensioni.

2. Ciò posto sia γ una superficie, dell' S_3 , d'ordine n e dotata di un fascio (k) di cubiche ellittiche poste ad s ad s nei piani di un involuppo (π) di classe μ .

Indichiamo con δ' il numero delle rette almeno doppie per γ e che, contate due volte, facciano parte di cubiche di (k) ; e con δ'' il numero delle rette almeno triple per γ e che, contate tre volte, siano cubiche di (k) . Proiettando genericamente questo fascio sul piano τ , si ottiene un sistema $(k') \infty^1$ di cubiche (generalmente ellittiche) d'indice n , per il quale è elemento s -plo ognuna b delle μ rette (triple) tracce in τ dei

¹⁾ *Delle superficie algebriche, d'ordine 6 o 7, con un fascio di cubiche ellittiche* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLI (1916), pp. 180-186].

μ piani di (π) passanti per il centro di proiezione. Al sistema (k') corrisponde ($n^\circ 1$) una curva c , dell' S_9 , che chiameremo *curva caratteristica* del fascio (k) .

Al sistema lineare delle cubiche di τ passanti per un punto D di b , corrisponde un iperpiano che seca c in n punti $3s$ dei quali coincidono col punto s -plo B , di c , corrispondente alla retta tripla b di (k') . Ne segue che ognuno degli s rami (distinti o no) di c aventi l'origine in B , oscula la superficie ψ ($n^\circ 1$) in questo punto.

Analogamente si ragiona per il punto di c corrispondente ad una qualunque retta tripla, di (k') , proiezione di una delle δ'' rette di γ accennate sopra.

Se, infine, L è il punto di c corrispondente ad una cubica, di (k') , della quale fa parte una retta l proiezione di una delle δ' rette dette in principio di questo n° , allora la tangente a c in L sarà anche tangente, in questo stesso punto, alla varietà ψ' ($n^\circ 1$).

3. È facile dimostrare, per es. analiticamente, che le ψ e ψ' hanno rispettivamente le molteplicità 8 e 6 per l'ipersuperficie Φ ($n^\circ 1$); ne segue che questa e la curva c avranno in comune altri

$$12n - 3 \cdot 8 \cdot \mu s - 2 \cdot 6 \cdot \delta' - 3 \cdot 8 \cdot \delta''$$

punti. Concludiamo dunque che ²⁾

il numero delle cubiche del fascio (k) dotate di punto doppio (e senza componente multipla) è $12n - 24\mu s - 12\delta' - 24\delta''$.

4. Siccome evidentemente questo numero non è negativo, possiamo affermare essere

$$\mu \leq \frac{n - \delta' - 2\delta''}{2s}, \quad \text{e in ogni caso} \quad \mu \leq \frac{n}{2s},$$

e questo limite di μ è più vantaggioso di quello prima conosciuto ³⁾.

P. es., per $n = 7$ è $\mu < 4$ ⁴⁾.

Si deduce pure

$$(1) \quad \delta' + 2\delta'' \leq n - 2\mu s.$$

Rammentiamo infine che indicando con p_c il genere della sezione piana generica

²⁾ A conferma dell'esattezza di questo teorema diamo la seguente dimostrazione (indiretta).

Il numero richiesto avrà evidentemente la forma $12n - \mu s x - \delta' y - \delta'' x$, ove le incognite x e y non dipendono dalle proprietà della superficie γ , ma dalle molteplicità, per Φ , delle varietà, dell' S_9 , corrispondenti ai sistemi di cubiche di τ tutte degeneri. Per calcolare x e y basta considerare dunque due particolari superficie ognuna con un fascio di cubiche ellittiche. Se, per es., ci serviamo di quelle studiate nei $n^\circ 17$ e $13a$ della mia Nota citata in ¹⁾, si ottengono le due equazioni $84 - 3x = 12$ e $72 - 2x - y = 12$, dalle quali si deduce $x = 24$ e $y = 12$, cioè si deduce il risultato del testo.

³⁾ Cfr. l. c. in ¹⁾, $n^\circ 5$. Oramai è facile dimostrare che indicando con δ il numero dei punti doppi della I_1^3 secata da (k) sopra una generica sezione piana di γ , è $\delta \geq n + \delta'$; basta infatti sostituire questo nuovo limite superiore di μ , nella (1) del l. c.

⁴⁾ Cfr. l. c. in ¹⁾, $n^\circ 16$.

di γ , e con p_i il genere di (k) , è ⁵⁾

$$(2) \quad p_c = 3p_i + 2(n-1) - 3\mu_s - \delta' - 3\delta''.$$

5. D'ora in poi supporremo che la superficie γ , oggetto del nostro studio, sia d'ordine $n = 6$, e che l'involuppo (π) sia un fascio di asse r , cioè sia $\mu = 1$.

6. È noto ⁶⁾ che se γ è rigata essa è generata dalle congiungenti i punti omologhi di due cubiche ellittiche non complanari, tali che fra i loro punti esista una corrispondenza biunivoca (senza punti uniti), in modo che la retta r comune ai piani delle due cubiche contenga tre coppie di punti omologhi.

Osserviamo inoltre che siccome un piano genericamente condotto per r seca ulteriormente γ in una cubica ellittica, possiamo affermare che la curva multipla di γ è costituita dalla generatrice tripla r , e da rette a questa incidenti. Una qualunque di queste rette non può essere generatrice ⁷⁾, e quindi esse sono precisamente due; anzi, tenendo conto che la rigata γ è ellittica, possiamo concludere che *la curva multipla di γ si compone di tre rette triple: la generatrice r , e due direttrici (sghembe) a questa incidenti.*

In altri termini possiamo concludere che per la rigata γ è $\delta' = 0$ e $\delta'' = 2$ ⁸⁾.

Concludendo:

La rigata γ si può anche considerare come il luogo delle rette congiungenti i punti omologhi di due rette sghembe d e d_1 fra i punti delle quali sia stabilita una corrispondenza $(3, 3)$, con la condizione che esista un punto di d e uno di d_1 , ad ognuno dei quali corrisponda l'altro contato tre volte.

Si noti, infine, che γ non ha alcun punto multiplo fuori delle rette r, d, d_1 ; e che il fascio (k) non ha alcun punto base, perchè nessun punto della generatrice tripla r può avere per γ molteplicità maggiore di tre.

§ 2.

7. D'ora in poi supporremo che la superficie γ non sia rigata.

Sia $s = 1$.

L'asse r del fascio (π) è una retta tripla per la superficie γ , e, contato tre volte, non è cubica di (k) . Inoltre se questo fascio ha punti base, essi sono quadrupli per γ .

La (2) diventa $p_c = 7 - \delta' - 3\delta''$.

Cominciamo dall'ipotesi $\delta'' = 0$.

Per $\delta' = 0$ è $p_c = 7$, ed è una siffatta superficie γ quella che si ottiene come

⁵⁾ Cfr. l. c. in ¹⁾, n° 3.

⁶⁾ Cfr. l. c. in ¹⁾, n° 2.

⁷⁾ Infatti il piano passante per essa e per r deve contenere una direttrice di γ , direttrice che non può essere una retta semplice.

⁸⁾ Alla medesima conclusione si perviene osservando che deve essere $(p_c =) 7 - \delta' - 3\delta'' = 1$ e (n° 4) $\delta' + 2\delta'' \leq 4$.

luogo della cubica (ellittica) comune a due elementi omologhi in una corrispondenza $(3, 1)$ stabilita fra i piani di un fascio (π) e le superficie cubiche di un fascio generico (γ) . Infatti si ottiene ⁹⁾ una superficie γ d'ordine $n=6$, con r , asse di (π) , tripla, e senza alcun'altra curva multipla.

Secondo che r ha in comune con la curva base di (γ) 0, 1, 2, 3 punti, il fascio (k) avrà rispettivamente 0, 1, 2, 3 punti base che risulteranno quadrupli per γ .

8. Per $\delta' = 1$ è $p_c = 6$; si ottiene una superficie γ siffatta, ripetendo la costruzione del n° precedente, supponendo però che le superficie cubiche del fascio (γ) siano coni ellittici. E precisamente:

a) La retta r sia assoggettata alla (sola) condizione di appoggiarsi alla generatrice doppia d di uno γ_i dei dodici coni razionali di (γ) ; e, inoltre, il piano rd , di (π) , abbia γ_i per cono omologo in (γ) . Il fascio (k) non avrà alcun punto base.

b) Se alle dette condizioni si aggiunge che r si appoggi alla curva base di (γ) , allora il fascio (k) acquisterà un (solo) punto base.

c) Se al caso b) si aggiunge la condizione che d sia retta base (semplice) per (γ) , allora (k) avrà due punti base distinti; questi diverranno infinitamente vicini se il piano che i coni di (γ) toccano lungo d , è il piano rd .

d) Se, infine, a quest'ultimo sottocaso si aggiunge che r incontri ulteriormente la base di (γ) , allora (k) avrà tre punti base, due dei quali infinitamente vicini.

9. Sia ora $\delta' = 2$ e quindi $p_c = 5$.

Si ottiene una tal superficie ripetendo la costruzione data nel n° 7, nell'ipotesi che il fascio (γ) possegga due rigate γ_1 e γ_2 le cui direttrici doppie d_1 e d_2 siano incidenti l'asse r di (π) . Bisogna supporre, inoltre, che ai piani rd_1 e rd_2 corrispondano rispettivamente le superficie γ_1 e γ_2 .

Anche qui si può fare in modo che il fascio (k) abbia 0, 1, 2 ovvero 3 punti base ¹⁰⁾.

10. Sia ora $\delta' = 3$ e quindi $p_c = 4$.

È una siffatta superficie γ quella rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda_{1^6 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7 8 9 10 11 12}|$, ove i primi nove punti costituiscono la base di un fascio (k') di cubiche. Questo è immagine di un fascio di cubiche ellittiche (k) i cui piani passano tutti per una stessa retta r , tripla per γ , rappresentata da $\lambda_{1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6 7 8 9 10 11 12}$.

La cubica $\lambda_{1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6 7 8 9 10}$ rappresenta una conica, la quale, essendo complanare con le infinite quartiche rappresentate da $|\lambda_{1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6 11 12}|$, è una retta doppia per γ , retta che insieme con la retta (semplice) rappresentata dal punto 10, costituisce una cubica degenera c_i di (k) .

Analogamente dicasi per le cubiche $\lambda_{1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6 7 8 9 11}$ e $\lambda_{1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6 7 8 9 12}$.

Ecco dunque che abbiamo nel fascio (k) tre cubiche c_1, c_2, c_3 ognuna degenerata

⁹⁾ Cfr. l. c. in ¹⁾, n° 9.

¹⁰⁾ Per quest'ultimo caso, per es., la retta r (contata una volta) insieme con la retta doppia d_i costituisca una cubica di (k) .

in una retta doppia (doppia anche per γ) e in una retta (semplice per γ) con questa complanare; ciò d'accordo con $\delta' = 3$.

a) Si noti che il fascio (k) non ha alcun punto base.

b) Supponiamo ora che siano collineari i quattro punti 1, 2, 10, 11; la loro retta rappresenta un punto base A del fascio (k) . Delle sopradette tre cubiche degeneri c_1, c_2, c_3 , la c_3 passa per A mediante la sua retta doppia; le c_1 e c_2 passano per A mediante le loro rette semplici rappresentate rispettivamente dai punti fondamentali 10 e 11.

c) Se pure collineari sono i punti 3, 4, 11, 12, il fascio (k) acquista un altro punto base B . Le c_2 e c_3 passano per B mediante le loro rette semplici, mentre la c_1 vi passa mediante la sua retta doppia. Si noti che siccome la retta (semplice) rappresentata dal punto 11 appartiene al punto A e anche al punto B , essa coincide con r ; in altri termini possiamo affermare che la retta semplice di c_3 coincide con r .

d) Se, infine, anche i punti 5, 6, 10, 12 sono collineari, il fascio (k) acquista un terzo punto base C . Le cubiche c_1 e c_3 passano per C mediante le loro rette semplici, mentre la c_2 passa per C mediante la sua retta doppia. Si noti che in questo caso nella retta r coincidono le tre rette semplici delle cubiche c_1, c_2, c_3 .

11. Esaminiamo infine l'ipotesi $\delta' = 4$, e quindi $p_c = 3$.

Se le quattro rette doppie per γ e, contate due volte, componenti di cubiche di (k) non passassero tutte per uno stesso punto (di r), la quartica ulteriore intersezione di γ con un piano condotto genericamente per una conveniente d di esse, sarebbe razionale ¹¹⁾. Ne seguirebbe la razionalità di γ , mentre fra i noti ¹²⁾ tipi di superficie a sezioni piane di genere $p_c = 3$, una siffatta superficie razionale non esiste.

Se, poi, le dette quattro rette doppie passassero per uno stesso punto A (di r), il cono quadrico cui esse con r appartengono, secherebbe ulteriormente γ in una retta, semplice per questa, passante per A . Questa retta sarebbe componente per una cubica (degenere) di (k) , cubica distinta ¹³⁾ dalle quattro degeneri contenenti rispettivamente le sopradette quattro rette doppie, ciò che è assurdo perchè (k) , oltre di queste, non possiede (n° 3) alcuna cubica dotata di punto doppio.

Concludiamo che è da escludere l'ipotesi in esame $\delta' = 4$.

¹¹⁾ Essa, intanto, sarebbe irriducibile perchè esisterebbe una retta semplice per γ e sghemba con d . Si noti, inoltre, che se le quattro rette doppie costituissero due coppie ognuna formata da due rette incidenti r in uno stesso punto, questo sarebbe un punto base per (k) , e quindi quadruplo per γ . Ne seguirebbe, in questo caso, che uno dei tre punti doppi della quartica in esame, sarebbe questo stesso punto.

¹²⁾ G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXV (1890), pp. 695-715]; e G. SCORZA, *Le superficie a curve sezioni di genere 3* [Annali di Matematica, serie III, tomo XVI (1909), pp. 255-326].

¹³⁾ Se la detta retta semplice insieme con una delle quattro rette doppie costituisce una stessa cubica di (k) , le rimanenti tre rette doppie dovrebbero giacere in uno stesso piano (non passante per r). Ne seguirebbe che il cono (degenere) tangente γ in A , sarebbe d'ordine maggiore di 4, ciò che è assurdo perchè A non può essere più che quadruplo per γ .

12. Sia (n° 7) ora $\delta'' = 1$ e quindi $p_c = 4 - \delta'$.

Ne segue ¹⁴⁾ subito $\delta' = 0$ ovvero $\delta' = 1$.

Per $\delta' = 0$ è $p_c = 4$.

Sia, nell' S_4 , γ_1 la totale intersezione di un'ipersuperficie cubica generale Σ e di un S_0 -cono quadrico Γ . Proiettando γ_1 da un punto generico O di questo, si ottiene la richiesta superficie γ . Questa avrà due fasci di cubiche ellittiche (k) e (k') , situate rispettivamente in due fasci di piani (π) e (π') ; l'asse r' di (π') è retta tripla per γ e, contata tre volte, cubica di (k) . Analogamente dicasi per l'asse r di (π) rispetto al fascio (k') .

a) Se il vertice V_1 di Γ non appartiene a Σ , il fascio (k) non ha alcun punto base.

b) Se V_1 è un punto di Σ , e questa ipersuperficie non è sottoposta ad alcun'altra condizione, allora il fascio (k) ha un (solo) punto base.

c) Ma se, inoltre, il piano Or tocca Σ in V_1 , allora (k) ha (in r) due punti base infinitamente vicini.

d) Se, infine, V_1 non è un punto generico di Σ , ma è tale che le sei rette di questa passanti per esso si dividano in due terne di rette ognuna costituita da rette complanari, e il piano di una di queste terne è precisamente il piano Or , allora (k) ha tre punti base infinitamente vicini, onde r è una tangente di flesso per ogni cubica di (k) .

13. Sia, infine, $\delta'' = 1$ e $\delta' = 1$, onde è $p_c = 3$.

Sia, nell' S_4 , γ_1 la totale intersezione di una ipersuperficie cubica Σ , soggetta alla sola condizione di avere una retta doppia, e di un S_0 -cono quadrico Γ passante (genericamente) per questa retta.

Anche qui, come nel n° precedente, si possono distinguere e ripetere i casi $a)$, $b)$, $c)$, $d)$, osservando che in ognuno degli ultimi due casi la retta, doppia per γ , la quale contata due volte è parte di una cubica di (k) , passa per il punto, di r , in cui coincidono rispettivamente due o tre punti base di questo fascio.

§ 3.

14. Sia ora $s = 2$.

Se l'asse r di (π) , contato tre volte, è cubica del fascio (k) , allora esso è una retta tripla per γ ; nell'ipotesi contraria, invece, r non appartiene a questa superficie. In ogni caso (k) ha, in r , tre punti base che risultano per γ quadrupli nella prima ipotesi, doppi nella seconda ¹⁵⁾.

¹⁴⁾ Qualunque siano i valori di $n > 5$, μ , s , è sempre $p_c > 2$; cfr. l. c. in ¹⁾, n° 4.

¹⁵⁾ Ciò si può anche dimostrare considerando la curva caratteristica (n° 2) di (k) . Si vedrebbe infatti che essa appartiene ad un S_6 passante per l' S_5 corrispondente (n° 1) al sistema delle cubiche di τ di ognuna delle quali fa parte la proiezione, in τ , di r . Ne segue che la detta curva caratteristica è comune a tre degli ∞^2 iperpiani corrispondenti a sistemi di τ ognuno costituito dalle cubiche passanti per uno stesso punto.

15. Esaminiamo primieramente il caso in cui r , contata tre volte, sia una cubica di (k) , onde è $p_i = 0$, e quindi $p_c = 4 - \delta' - 3\delta''$.

Non può ¹⁶⁾ essere $\delta'' = 1$, e quindi sarà $\delta'' = 0$ e $\delta' = 0$, ovvero $\delta'' = 0$ e $\delta' = 1$.

Per $\delta' = \delta'' = 0$ è $p_c = 4$.

Si ottiene una siffatta superficie γ proiettando la superficie γ_1 completa intersezione di un S_1 -cono quadrico Γ , dell' S_4 , con un'ipersuperficie cubica Σ generale, in posizione generica tra loro, da un punto generico di Γ . I tre punti base (n° 14) di (k) sono tutti distinti, ovvero due (soli) infinitamente vicini, o infine tutti e tre siffatti, secondo che la retta r_1 , vertice di Γ , incontra Σ in tre punti distinti, ovvero tocca Σ , o infine è una retta osculatrice per questa ipersuperficie.

16. Per $\delta' = 1$ è $p_c = 3$.

Si consideri la superficie γ_1 , dell' S_4 , rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda_{1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9}|$, ove i punti 8 e 9 sono infinitamente vicini. Essa ammette un fascio (k_1) di cubiche ellittiche rappresentato da $|\lambda_{1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3 7^3 8^3}|$, e i piani di queste generano un S_1 -cono quadrico Γ . La $\lambda_{1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3 7^3 8^3}$ è immagine di una retta doppia per γ_1 e parte di una cubica di (k_1) . Proiettando γ_1 da uno generico dei punti di Γ , si ottiene la superficie γ richiesta.

17. Supponiamo (n° 14) ora che la retta r , contata tre volte, non sia una cubica del fascio (k) .

Cominciamo ad osservare che dev'essere $\delta'' = 0$, perchè altrimenti il punto comune alla retta tripla di γ e alla retta r sarebbe almeno triplo per γ , mentre esso deve essere (n° 14) doppio per questa superficie.

Siccome, poi, evidentemente è $p_c \leq 10 - \delta'$, sarà, in virtù della (2) del n° 4,

$$3p_i + 4 - \delta' \leq 10 - \delta',$$

cioè

$$p_i \leq 2.$$

Inoltre, in virtù della (1) del n° 4, è $\delta' \leq 2$, onde tutte le ipotesi da esaminare sono $\delta' = 0$, $\delta' = 1$, $\delta' = 2$.

18. Sia $\delta' = 0$.

Per $p_i = 0$ è $p_c = 4$.

a) Si ottiene una siffatta superficie γ , se si proietta la superficie γ_1 del n° 15 da un punto generico dell' S_4 ambiente.

b) Ovvero:

Siano (π) e (χ) due fasci, di piani il primo e di superficie cubiche generali il secondo; si stabilisca fra i loro elementi una corrispondenza algebrica $(1, 2)$; si faccia, inoltre, in modo che un piano π_1 di (π) sia parte di una, χ_1 , delle sue due superficie

¹⁶⁾ Cfr. 14).

corrispondenti in (χ) . Il luogo della cubica comune a due elementi omologhi è, a prescindere da π_1 , una superficie γ del tipo in esame.

La curva base di (χ) si spezza in una cubica di π_1 e in una sestica giacente nella quadrica di χ_1 ; è questa sestica la (sola) curva multipla (doppia) di γ . I tre punti comuni ad r e ad una generica χ_2 delle superficie di (χ) , punti che sono i tre (n° 14) punti base del fascio (k) , possono essere tutti e tre distinti, soltanto due infinitamente vicini, o infine siffatti tutti e tre, secondo che la retta r non tocca la cubica $\chi_2\pi_1$, ovvero è una tangente (ordinaria) di questa, o infine ne è una tangente di flesso.

19. Per $p_i = 1$ è $p_c = 7$.

Si ottiene una superficie γ siffatta ripetendo la costruzione data nel n° precedente in *b*), supponendo però che la corrispondenza fra gli elementi di (π) e quelli di (χ) sia $(2, 2)$, con la (sola) condizione che della superficie χ_1 facciano parte i due piani di (π) ad essa omologhi. La curva base di (χ) si spezza in tre cubiche piane, una (sola) delle quali costituisce la curva multipla (doppia) di γ .

Si noti che due qualunque cubiche complanari di (k) , hanno tali contatti nei punti base, da assorbire sei intersezioni.

20. Per $p_i = 2$, infine, è $p_c = 10$.

Si ottiene la richiesta superficie γ se si ripete la costruzione del n° 18 *b*), supponendo però che la corrispondenza fra gli elementi di (π) e quelli di (χ) sia $(3, 2)$, con la (sola) condizione che la superficie χ_1 sia costituita dai suoi tre piani corrispondenti. Due qualunque cubiche di (k) complanari hanno tali contatti nei punti base, da assorbire tutti i nove punti d'intersezione.

21. Sia ora $\delta' = 1$.

Per $p_i = 0$ è $p_c = 3$.

Si consideri la superficie γ_1 del n° 16; proiettandola da un punto generico dell' S_4 ambiente, si ottiene una superficie γ come si richiede.

22. Esaminiamo ora l'ipotesi $p_i = 1$.

Un piano condotto per la retta doppia d , parte di una cubica di (k) , seca ulteriormente γ in una quartica q ¹⁷⁾ che non è razionale perchè (k) è ellittico.

Si osservi, ancora, che una retta t tangente a q in un punto P e passante per il punto $A \equiv dr$, è anche tangente alla cubica di (k) che passa per P ; ma le tangenti siffatte costituiscono un cono d'ordine $\leq 4 + 4 = 8$, onde le rette come t non possono essere più di 8. Ne segue che q è ellittica. Su questa le cubiche di (k) segnerebbero una I_2' dotata di $2(1 + 1) - 4 \cdot 1 = 0$ punti doppi, ciò che è assurdo perchè in ogni piano condotto per r esistono certamente rette distinte da r , passanti per il punto A , e tangenti a cubiche di (k) .

Concludiamo dunque che l'ipotesi in esame è da escludere.

¹⁷⁾ Se q non fosse irriducibile, si spezzerebbe in due coniche, ciò che è assurdo perchè, essendo $p_i = 1$, su γ non esiste alcuna curva razionale che non sia parte di qualche cubica di (k) .

23. L'ipotesi $p_i = 2$ si esclude con ragionamenti analoghi a quelli tenuti nel n° precedente.

24. Infine l'ipotesi $\delta' = 2$ si esclude pure; infatti per $p_i > 0$ basta ragionare come nei n° 22 e 23, e per $p_i = 0$ basta osservare che sarebbe (n° 4) $p_c = 2$, ciò che ¹⁸⁾ è assurdo.

25. Indicando con ¹⁹⁾.

$$(1, p_i, s, \delta', \delta''), (1, p_i, s, \delta', \delta'')', (1, p_i, s, \delta', \delta'')'', (1, p_i, s, \delta', \delta'')'''$$

la superficie γ secondo che il fascio (k) ha rispettivamente 0, 1, 2, 3 punti base, possiamo concludere che

le superficie, dell' S_3 , d'ordine $n = 6$ con un fascio di cubiche ellittiche i cui piani costituiscano un fascio, sono

$$\begin{aligned} &(1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0)', (1, 0, 1, 0, 0)'', (1, 0, 1, 0, 0)''', \\ &(1, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1, 0)', (1, 0, 1, 1, 0)'', (1, 0, 1, 1, 0)''', \\ &(1, 0, 1, 2, 0), (1, 0, 1, 2, 0)', (1, 0, 1, 2, 0)'', (1, 0, 1, 2, 0)''', \\ &(1, 0, 1, 3, 0), (1, 0, 1, 3, 0)', (1, 0, 1, 3, 0)'', (1, 0, 1, 3, 0)''', \\ &(1, 0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0, 1)', (1, 0, 1, 0, 1)'', (1, 0, 1, 0, 1)''', \\ &(1, 0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 1)', (1, 0, 1, 1, 1)'', (1, 0, 1, 1, 1)''', \\ &(1, 0, 2, 0, 0)''', (1, 0, 2, 1, 0)''', \\ &(1, 0, 2, 0, 0)''', (1, 1, 2, 0, 0)''', (1, 2, 2, 0, 0)''', \\ &(1, 0, 2, 1, 0)''' \end{aligned}$$

e la rigata $(1, 0, 1, 0, 2)$.

Catania, agosto 1916.

GIUSEPPE MARLETTA.

¹⁸⁾ Cfr. ¹⁴⁾.

¹⁹⁾ Cfr. l. c. in ¹⁾, n° 21. Col simbolo $(1, \dots)$ intendiamo significare che la retta r asse del fascio (π) è, contata tre volte, cubica di (k).

ON THE NEWTONIAN POTENTIAL DUE TO A SURFACE DISTRIBUTION HAVING A DISCONTINUITY OF THE SECOND KIND.

By **G. Prasad** (Calcutta).

Adunanza dell'11 giugno 1916.

The object of the following lines is chiefly to point out a case in which the Newtonian potential, due to a surface distribution having a discontinuity of the second kind, is such that the normal derivate does *not* tend to a limit as the boundary is approached. It is believed that such a case ¹⁾ has never been discussed by any of the previous writers on the subject from Prof. HÖLDER to Prof. PICARD. About the end of the paper, I have given a simple case ²⁾ in which the derivate tends to a limit, although the surface distribution has a discontinuity of the second kind.

1. In order to avoid unnecessary complications, I take the surface to be a sphere of unit radius. Let C be the centre of the sphere and O any point on it. Then, taking OC as the χ -axis and the tangent-plane at O as the χ -plane, the potential V at any point $(0, 0, \chi)$ on OC may be taken to be $u + U$, where u is the potential due to a small element S of the sphere bounded by the circle QOQ' and U that due to the remaining part of the sphere. It is obvious that $\lim_{\chi=0} \frac{\partial U}{\partial \chi}$ exists; also

$$\frac{\partial u}{\partial \chi} = -2\chi\pi \int_0^a \frac{\sigma r dr}{(\chi^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

where σ is the surface density, $OQ = a$, and the curvature of the element S is neglected, it being taken to be a plane circle with centre O and radius a .

2. I proceed to prove that $\lim_{\chi=0} \frac{\partial u}{\partial \chi}$ is non-existent provided that $\sigma = \cos \log \frac{1}{r}$.

¹⁾ For the logarithmic potential due to a linear distribution, I have given a similar case in the Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, vol. V (1914).

²⁾ For the logarithmic potential due to a linear distribution, Dr. G. PUCCIANO has given a similar case: G. PUCCIANO, *Studio sui potenziali logaritmici di strato lineare semplice e doppio, e delle loro derivate prime* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIII (1° semestre 1907), pp. 374-393].

Here, putting $\log \frac{1}{r} = v$, we have

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\chi\pi} \frac{\partial u}{\partial \chi} &= \int_0^a \frac{r \cos \log \frac{1}{r} dr}{(\chi^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \int_{\log \frac{1}{a}}^{\infty} \frac{e^{-2v} \cos v dv}{(\chi^2 + e^{-2v})^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \int_{\log \frac{1}{a}}^{\log \frac{1}{\chi}} \frac{e^{-2v} \cos v dv}{(\chi^2 + e^{-2v})^{\frac{3}{2}}} + \int_{\log \frac{1}{\chi}}^{\infty} \frac{e^{-2v} \cos v dv}{(\chi^2 + e^{-2v})^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \int_{\log \frac{1}{a}}^{\log \frac{1}{\chi}} dv e^v \cos v \left\{ 1 - \frac{3}{2} \chi^2 e^{2v} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \chi^4 e^{4v} - \dots \right\} \\
 &\quad + \int_{\log \frac{1}{\chi}}^{\infty} \frac{dv e^{-2v} \cos v}{\chi^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{e^{-2v}}{\chi^2} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \frac{e^{-4v}}{\chi^4} - \dots \right\} \\
 &= \left[\frac{e^v (\sin v + \cos v)}{1 + 1^2} - \frac{3}{2} \frac{\chi^2 e^{3v} (\sin v + 3 \cos v)}{1 + 3^2} + \dots \right]_{\log \frac{1}{a}}^{\log \frac{1}{\chi}} \\
 &\quad + \left[\frac{e^{-2v} (\sin v - 2 \cos v)}{\chi^3 (1 + 2^2)} - \frac{3}{2} \frac{e^{-4v} (\sin v - 4 \cos v)}{\chi^5 (1 + 4^2)} + \dots \right]_{\log \frac{1}{\chi}}^{\infty} \\
 &= \frac{1}{\chi} \sin \log \frac{1}{\chi} \left\{ \left(\frac{1}{1 + 1^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{1 + 3^2} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \frac{1}{1 + 5^2} - \dots \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{1 + 2^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{1 + 4^2} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \frac{1}{1 + 6^2} - \dots \right) \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{\chi} \cos \log \frac{1}{\chi} \left\{ \left(\frac{1}{1 + 1^2} - \frac{3}{2} \frac{3}{1 + 3^2} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \frac{5}{1 + 5^2} - \dots \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{2}{1 + 2^2} - \frac{3}{2} \frac{4}{1 + 4^2} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \frac{6}{1 + 6^2} - \dots \right) \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{a} \frac{\sin \log \frac{1}{a} + \cos \log \frac{1}{a}}{1 + 1^2} + \text{terms which vanish with } \chi.
 \end{aligned}$$

Now the infinite series in the above expression are all convergent.

Therefore, as χ tends to zero, $\frac{\partial u}{\partial \chi}$ behaves as $A \cos \log \frac{1}{\chi} + B \sin \log \frac{1}{\chi}$, where A and B are known constants.

Thus it is proved that $\lim_{\chi=0} \frac{\partial u}{\partial \chi}$ and, consequently, $\lim_{\chi=0} \frac{\partial V}{\partial \chi}$ are non-existent.

3. It is easily seen that, if the distribution be

$$\sigma = \sum_1^{\infty} \frac{f(\theta - \omega_n)}{n^2},$$

where θ is the angle made by any radius CP with a fixed diameter, $\{\omega_n\}$ is the aggregate of rational numbers between 0 and π , and $f(x)$ is $\cos \log \frac{1}{x}$ or $\cos \log -\frac{1}{x}$ according as x is positive or negative, the normal derivate at any point Q on the radius CP makes infinite number of fluctuations (without tending to a limit) as Q approaches P , provided that θ be a member of the aggregate.

4. I proceed now to prove that $\lim_{\chi=0} \frac{\partial u}{\partial \chi}$ and, consequently, $\lim_{\chi=0} \frac{\partial V}{\partial \chi}$ are existent provided that $\sigma = \cos \frac{1}{r}$.

Putting $\frac{1}{r} = v$, we have

$$-\frac{1}{2\chi\pi} \frac{\partial u}{\partial \chi} = \int_0^a \frac{r \cos \frac{1}{r} dr}{(\chi^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{\frac{1}{a}}^{\infty} \frac{\cos v dv}{(1 + v^2 \chi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Now $\frac{1}{(1 + v^2 \chi^2)^{\frac{3}{2}}}$ is always positive and its greatest value is $\frac{1}{\left(1 + \frac{\chi^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$. There-

fore

$$\left| \int_{\frac{1}{a}}^{\infty} \frac{\cos v dv}{(1 + v^2 \chi^2)^{\frac{3}{2}}} \right| < \frac{1}{\left(1 + \frac{\chi^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hence $\frac{\partial u}{\partial \chi}$ is numerically less than $2\pi\chi$. Therefore $\lim_{\chi=0} \frac{\partial u}{\partial \chi} = 0$.

Calcutta, 10 May 1916.

G. PRASAD.

INTEGRAL INVARIANTS IN PROJECTIVE GEOMETRY ¹⁾.

By **E. J. Wilczynski** (Chicago, Ill.).

Adunanza del 13 agosto 1916.

If we denote by x and y the cartesian coordinates of a point in the plane, and if x and y are given as differentiable functions of a parameter t , the point (x, y) will describe an arc of a curve when the parameter t varies continuously from $t=t_0$ to $t=t_1$. The length of this arc is given by the familiar formula

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

and the value of this integral evidently remains unchanged if we transform the curve by means of an arbitrary motion. We may express this fact by saying that s is an integral invariant of the group of motions, or a metric integral invariant of the given plane curve. If w is any other metric integral invariant of this curve, formed from x and y by only a single integration, we may write

$$w = \int I ds,$$

where I is a differential invariant of the curve, so that I may be expressed as a function of r , dr/ds , d^2r/ds^2 , etc., where r represents the radius of curvature ²⁾.

It is very easy to formulate a corresponding theorem for the integral invariants of a plane curve which correspond to the group of all projective transformations.

Let y_1, y_2, y_3 , be the homogeneous coordinates of a point P_y of the plane, and

¹⁾ Presented to the American Mathematical Society, January 1, 1916.

²⁾ Of course all of these statements are familiar. The notion of an integral invariant has also appeared frequently in POINCARÉ's studies in Dynamics and was formulated in general by LIE. See S. LIE, *Die Theorie der Integralinvarianten ist ein Corollar der Theorie der Differentialinvarianten* [Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. XLIX (1897), pp. 342-357]; *Ueber Integralinvarianten und ihre Verwertung für die Theorie der Differentialinvarianten*, [ibidem, pp. 369-410].

let us suppose that y_1, y_2, y_3 are given as linearly independent analytic functions of a parameter x . As x changes, P_y will describe a non-rectilinear plane curve C_y . Let

$$(1) \quad y''' + 3 p_1 y'' + 3 p_2 y' + p_3 y = 0$$

be the linear homogeneous differential equation of the third order which y_1, y_2, y_3 satisfy as functions of x , and of which y_1, y_2, y_3 constitute a fundamental system of solutions. Any other fundamental system of (1) will give rise to a curve which is a projective transformation of C_y .

The following combinations of the coefficients of (1),

$$(2) \quad P_2 = p_2 - p_1^2 - p_1', \quad P_3 = p_3 - 3 p_1 p_2 + 2 p_1' p_1 - p_1'',$$

where

$$p_1' = \frac{dp_1}{dx}, \quad p_1'' = \frac{d^2 p_1}{dx^2}, \quad \text{etc.},$$

are called *seminvariants* of (1) and depend only upon the *ratios* of the three functions y_1, y_2 , and y_3 . This may be proved by showing that P_2 and P_3 remain unchanged if the equation (1) is transformed by any transformation of the form $y = \lambda(x) \bar{y}$, where $\lambda(x)$ is an arbitrary function of x . The derivatives of P_2 and P_3 , of any order, are also seminvariants, and every seminvariant may be expressed as a function of P_2, P_3 , and of their derivatives ³⁾.

If we change the parametric representation of the curve by introducing a new independent variable

$$(3) \quad \bar{x} = \xi(x),$$

the seminvariants will change, but certain functions of them called *invariants* will remain unaltered except for a factor. The simplest of these invariants are

$$(4) \quad \theta_3 = P_3 - \frac{3}{2} P_2',$$

and

$$(5) \quad \theta_8 = 6 \theta_3 \theta_3'' - 7 (\theta_3')^2 - 27 P_2 \theta_3^2.$$

As a consequence of a transformation of the form (3), these invariants assume the values $\bar{\theta}_3$ and $\bar{\theta}_8$, where

$$(6) \quad \bar{\theta}_3 = \frac{\theta_3}{(\xi')^3}, \quad \bar{\theta}_8 = \frac{\theta_8}{(\xi')^8},$$

showing that θ_3^3/θ_8 is an *absolute invariant* ⁴⁾.

³⁾ E. J. WILCZYNSKI, *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces* [Leipzig und Berlin, Teubner, 1906], Chapter III, pp. 58, 59. Future references to this book will be made in the form: *Proj. Dif. Geom.*

⁴⁾ *Proj. Dif. Geom.*, l. c. 3), p. 58

But we may write the first equation of (6) as follows

$$\sqrt[3]{\theta_3(\bar{x})} d\bar{x} = \sqrt[3]{\theta_3(x)} dx,$$

which shows that the integral

$$(7) \quad p = \int \sqrt[3]{\theta_3} dx$$

has an intrinsic significance for the curve C_y . For it remains unchanged under all of the transformations $y = \lambda(x)\bar{y}$ which leave the ratios $y_1: y_2: y_3$ unaltered, and also under all of those transformations $\bar{x} = \xi(x)$ which correspond to an arbitrary change of the parametric representation. Moreover since the integrand depends only upon the coefficients of (1), which are invariant under all projective transformations, it is evident that the value of p for any arc of C_y will not be changed by projective transformation. Thus p is a *projective integral invariant* of C_y .

In the same way we may form an integral invariant from any relative invariant of equation (1). Thus, for instance,

$$(8) \quad q = \int \sqrt[8]{\theta_8} dx$$

is also an integral invariant of C_y .

For the sake of emphasizing the distinction between invariants such as θ_3 and θ_8 on the one hand, and the integral invariants such as p and q on the other, we shall speak of the former as *differential invariants*. Moreover we may obviously form integral invariants such as

$$\int p \sqrt[3]{\theta_3} dx = \int \left[\int \sqrt[3]{\theta_3} dx \right] \sqrt[3]{\theta_3} dx,$$

in the formation of which the process of integration is used more than once. We do not, at present, wish to consider such integrals. We shall confine our attention to *simple* integral invariants, that is integral invariants for which the integrand is a relative differential invariant.

The differential invariant of lowest order of a non-rectilinear plane curve is θ_3 . Consequently p is the *simple projective integral invariant of lowest order of such a curve*.

Let θ_v be any differential invariant of C_y and let its weight be called v . Then

$$p_v = \int \sqrt[v]{\theta_v} dx$$

is a projective integral invariant of C_y . If θ_3 does not vanish identically, that is, if C_y is not a conic ⁵⁾, p_v may evidently be written in the form

$$p_v = \int \frac{\sqrt[v]{\theta_v}}{\sqrt[3]{\theta_3}} dp.$$

⁵⁾ *Proj. Dif. Geom.*, l. c. 3), p. 61.

But the coefficient of dp in this integral is an *absolute* differential invariant.

We may summarize these results as follows. *The simple integral invariant of lowest order in the projective theory of non-rectilinear plane curves is*

$$p = \int \sqrt[3]{\theta} dx,$$

and all other simple projective integral invariants may be expressed in the form

$$\int I dp$$

where I is an absolute projective differential invariant of the curve.

For any arc of a conic the integral p is equal to zero. Thus the conics are exceptional curves for the theory of projective integral invariants, just as the minimal lines are exceptional for the theory of metric integral invariants.

The theorem just proved may be extended at once to curves in space of any number of dimensions. In any such space, of n dimensions, the rational normal curves of order n play an exceptional part, in so far as all of their simple integral invariants will be equal to zero. The notion of a projective integral invariant may moreover be applied to surfaces, congruences, etc., and it is easy to write down a large number of such invariants. In the present paper we shall, however, confine our attention to the following question; *what is the geometric significance of the integral invariant p ?*

For the purpose of answering this question it is convenient to make use of a reduced form, the so-called LAGUERRE-FORSYTH canonical form of the differential equation (1). This canonical form, characterised by the absence of the first and second derivative from the equation, may always be obtained from (1) by means of an appropriately chosen transformation of the form

$$\bar{x} = \xi(x), \quad \bar{y} = \lambda(x)y.$$

Since this transformation does not change the value of the integral invariant, we may take for granted that equation (1) is already in the LAGUERRE-FORSYTH canonical form, so that $p_1 = p_2 = 0$, and consequently

$$P_2 = 0, \quad \theta_3 = P_3.$$

Let us denote by P_x a point of our plane curve K which corresponds to a value x of the parameter, in the vicinity of which the curve is analytic and where θ_3 is different from zero. There exists a pencil of cubic curves, each of which has seventh order or eight-pointic contact with K at P_x . One and only one of these cubics has the given point P_x of K as a double point. This curve is called the *eight-pointic nodal cubic* of P_x .

6) *Proj. Dif. Geom.*, l. c. 3), p. 61.

If we make use of a certain local coordinate system, which we need not describe in detail, the equations of the tangent, osculating conic, and eight-pointic nodal cubic of the point P_x become

$$(9) \quad x_3 = 0, \quad x_2^2 - 2x_1x_3 = 0,$$

and

$$(10) \quad 5(x_2^2 - 2x_1x_3)(P'_3x_3 - 3P_3x_2) + 12P_3^2x_3^3 = 0 \quad 7)$$

respectively.

The three points of inflection of the nodal cubic (10) are on a line i_x whose equation is

$$(11) \quad x_1 + \alpha\sqrt{2}x_2 + \alpha^2x_3 = 0,$$

where

$$(12) \quad \alpha = -\frac{1}{6}\sqrt{2}\frac{P'_3}{P_3} \quad 8).$$

The three inflectional tangents are given by the three equations obtained from

$$(13) \quad \sqrt[3]{2}x_1 + (2^{\frac{5}{6}}\alpha + 3\sqrt[3]{4}\beta)x_2 + (\sqrt[3]{2}\alpha^2 + 3 \cdot 2^{\frac{7}{6}}\alpha\beta + 12\beta^2)x_3 = 0 \quad 9),$$

where

$$(14) \quad \beta = -\left(\frac{P_3}{20}\right)^{\frac{1}{3}},$$

by giving to β , as defined by (14), its three values. If P_x is a real point of a real curve (not a conjugate point) only one of these three inflectional tangents will be real. In this case we may take for β its real value and equation (13) will define the real inflectional tangent which we shall henceforth designate by τ_x .

Let us denote by I_x and T_x the points in which the lines i_x and τ_x intersect the tangent t_x of the point P_x . Since the equation of the tangent is $x_3 = 0$, we find the coordinates of I_x and T_x to be

$$\text{and} \quad x_1 = -\alpha\sqrt{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0,$$

$$x_1 = -(\alpha\sqrt{2} + 3\beta\sqrt[3]{2}), \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0$$

respectively. The coordinates of P_x , the point of contact, are

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Let us now give x an infinitesimal increment δx_1 , and let $P_{x+\delta x_1}$ be the corre-

7) *Proj. Dif. Geom.*, l. c. 3), pp. 61-64.

8) *Proj. Dif. Geom.*, l. c. 3), p. 85.

9) This result is easily obtained from the formulae on pages 85-86 of *Proj. Dif. Geom.*

sponding point of the curve K . Except for infinitesimals of a higher order, the coordinates of $P_{x+\delta x_1}$ will be

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \delta x_1, \quad x_3 = 0,$$

in accordance with the familiar fact that the equation of the line $P_x P_{x+\delta x_1}$ differs from that of the tangent t_x only by infinitesimals of a higher order. Consequently the coordinates of the points I'_x, T'_x , in which the line $P_x P_{x+\delta x_1}$ intersects i_x and t_x , will differ from those of I_x and T_x only by infinitesimals of a higher order. We may therefore substitute the coordinates of I_x and T_x in place of the coordinates of I'_x and T'_x for the purpose of computing the double ratio $(I'_x, T'_x, P_x, P_{x+\delta x_1})$ to terms of the first order in δx_1 . We find in this way the value

$$(15) \quad \kappa_x = (I'_x, T'_x, P_x, P_{x+\delta x_1}) = 1 + 3\sqrt[3]{2}\beta(x)\delta x_1,$$

where we have put into evidence the argument of the function β for the sake of greater distinctness.

Let us now consider the line $P_{x+\delta x_1} P_{x+\delta x_1+\delta x_2}$ which joins $P_{x+\delta x_1}$ to the point $P_{x+\delta x_1+\delta x_2}$ of K which corresponds to the value $x + \delta x_1 + \delta x_2$ of the parameter, δx_2 being an infinitesimal of the same order as δx_1 . We shall find by a repetition of the above argument

$$\kappa_{x+\delta x_1} = (I'_{x+\delta x_1}, T'_{x+\delta x_1}, P_{x+\delta x_1}, P_{x+\delta x_1+\delta x_2}) = 1 + 3\sqrt[3]{2}\beta(x + \delta x_1)\delta x_2,$$

where the notation is obvious and where, as in (15), the equality of the two members is assured except for infinitesimals of higher order.

Let us project the points of the line $P_{x+\delta x_1} P_{x+\delta x_1+\delta x_2}$ upon the line $P_x P_{x+\delta x_1}$, in such a way as to make $I'_{x+\delta x_1}$ and $T'_{x+\delta x_1}$ project into I'_x and T'_x respectively while $P_{x+\delta x_1}$ is projected into itself. Let $P'_{x+\delta x_1+\delta x_2}$ be the point of $P_x P_{x+\delta x_1}$ which, in this perspective, corresponds to $P_{x+\delta x_1+\delta x_2}$. Then we may write, except for infinitesimals of a higher order,

$$(16) \quad \kappa_{x+\delta x_1} = (I'_x, T'_x, P_{x+\delta x_1}, P'_{x+\delta x_1+\delta x_2}) = 1 + 3\sqrt[3]{2}\beta(x + \delta x_1)\delta x_2.$$

We propose to form the product of K_x and $K_{x+\delta x}$ making use of the double-ratio equation

$$(17) \quad (A, B, C, D)(A, B, D, E) = (A, B, C, E).$$

Thus we find

$$(I'_x, T'_x, P_x, P'_{x+\delta x_1+\delta x_2}) = \kappa_x \kappa_{x+\delta x_1}.$$

The continuation of this process leads to the following theorem which furnishes the desired geometric interpretation for the integral invariant p .

Consider a curve K given by means of a parametric representation in homogeneous coordinates

$$y_k = f_k(x), \quad (k = 1, 2, 3).$$

Let these functions be linearly independent and analytic in the vicinity of every value of x in the interval $a \leq x \leq b$, and let the invariant θ_3 be a non-vanishing analytic function of x in the same interval.

Divide the interval $a \leq x \leq b$ into n parts by means of the values $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ of x , let $\delta x_k = x_{k+1} - x_k$, and assume that each δx_k approaches zero as an infinitesimal of the first order as n grows beyond bound. Let A or $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ or B be the points of the curve K which correspond to these $n+1$ values of x . Let t_k be the tangent and C_k the eight pointic nodal cubic of the point P_k . The three points of inflection of C_k are on a line i_k which intersects t_k in a point I_k . Denote by τ_k a specified one of the inflectional tangents of C_k , (the real one if K is real and P_k is not a conjugate point of K) and let T_k be the intersection of τ_k with t_k .

The line $P_k P_{k+1}$ will intersect i_k and t_k in two points, I'_k and T'_k , and the cross-ratio $(I'_k, T'_k, P_k, P_{k+1})$ will differ from

$$(18) \quad 1 + 3\sqrt[3]{2}\beta(x_k)\delta x_k = 1 - \frac{3}{\sqrt[3]{10}}\sqrt[3]{\theta_3(x_k)}\delta x_k$$

by an infinitesimal of the second order at most.

By means of a perspective correspondence the three points $I'_{n-1}, T'_{n-1}, P_{n-1}$ of $P_{n-1}P_n$ may be projected into the points $I'_{n-2}, T'_{n-2}, P_{n-1}$ of $P_{n-2}P_{n-1}$. Let B_{n-1} be the point of $P_{n-2}P_{n-1}$ which, in this perspective, corresponds to B . Then project similarly $I'_{n-2}, T'_{n-2}, P_{n-2}, B_{n-1}$ into the points $I'_{n-3}, T'_{n-3}, P_{n-2}, B_{n-2}$ of $P_{n-3}P_{n-2}$ and continue in this way. We shall obtain finally upon the line AP_1 a point B_1 which corresponds to B in this sequence of perspectives, and the double ratio (I'_1, T'_1, A, B_1) will differ from the product

$$(19) \quad \prod_n = \prod_{k=1}^n \left[1 - \frac{3}{\sqrt[3]{10}}\sqrt[3]{\theta_3(x_k)}\delta x_k \right]$$

by an infinitesimal of the first order at most.

As n grows beyond bound, B_1 will approach a limiting position Q on the initial tangent t_0 of the arc AB , and the double ratio

$$(20) \quad \kappa = (I_0, T_0, A, Q)$$

will be equal to the limit of the product \prod_n . Under the assumptions which we have made this product will converge absolutely and uniformly and we shall have

$$(21) \quad \log \kappa = -\frac{3}{\sqrt[3]{10}} \int_a^b \sqrt[3]{\theta_3(x)} dx.$$

In consequence of our preliminary discussion, the statement of the theorem suffices for its proof. It is a matter of some interest however to verify the validity of equation

(21) more directly. Let us think of z as a function of the upper limit b . Then

$$z(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_n.$$

Let us assume that our assumptions in regard to the analytic character of the curve and the invariant θ_3 are satisfied also within an interval of which b is an interior point. Then we shall have

$$z(b + \delta b) = z(b) \left[1 - \frac{3}{\sqrt[3]{10}} \sqrt[3]{\theta_3(b + \delta b)} \delta b \right]$$

except for infinitesimals of a higher order than δb . Consequently we find that

$$\frac{\log z(b + \delta b) - \log z(b)}{\delta b} \quad \text{and} \quad -\frac{3}{\sqrt[3]{10}} \sqrt[3]{\theta_3(b + \delta b)}$$

differ at most by an infinitesimal, and therefore we shall have

$$\frac{d \log z(b)}{db} = -\frac{3}{\sqrt[3]{10}} \sqrt[3]{\theta_3(b)},$$

which verifies (21).

Evidently not all of the general continuity assumptions which we have made are necessary. However the existence of the eight-pointic nodal cubic requires the existence of seventh order derivatives of the functions y_1, y_2, y_3 which define the curve K and it seems scarcely profitable to assume that much and still refrain from assuming these functions to be analytic.

The condition that θ_3 shall be different from zero for all values of x in the interval $a \leq x \leq b$ is of a different kind, and may be suppressed altogether. It is evident analytically that the factors of the infinite product which correspond to such points are equal to unity or at most differ from unity by an infinitesimal of order higher than the first. Consequently the value of $K(b)$ will not be changed if all such factors are omitted from the product. The reason for discussing the case $\theta_3 = 0$ separately at all is to be found on the geometric side. If θ_3 is equal to zero for a continuous set of values, the corresponding arc of K coincides with an arc of a conic. If θ_3 vanishes for an isolated value of x , the osculating conic of the corresponding point P_x hyperosculates K . In other words, P_x is then a sextactic point of the curve, that is, the curve K and its osculating conic have at least six coincident points of intersection at P_x . In all such cases, the eight pointic nodal cubic becomes indeterminate as is shown by equation (10). But we may regard the eight-pointic nodal cubic of such a point as being a degenerate cubic composed of the osculating conic and the tangent of the point P_x . Every point of the tangent must then be regarded as a point of inflection of the cubic and the lines i_x and t_x coincide with each other and with t_x . The points I_x and T_x are then to be regarded as coincident but indeterminate points of t_x . If

this interpretation be adopted, the cross-ratio K_x as given by (15) will be equal to unity and it becomes unnecessary to specify the case $\theta_3 = 0$ as exceptional for the purposes of this theorem.

The function $\kappa(b)$ presents itself as a limit of an infinite product each of whose factors differs from unity by an infinitesimal. Such a limit is clearly the multiplicative analogon of a definite integral. It seems but natural that such infinite products should appear in projective geometry, on account of the fundamental rôle of the double ratio in projective geometry and on account of the multiplicative property (17) of the double ratio, which corresponds to the additive property of the distance concept in metric geometry.

The form, which we have used for the integral invariant p , was the simplest and most effective from our point of view. It seems desirable however to give some other forms in which this integral may be written as a result of introducing other and more familiar variables.

If the curve K is given by an equation of the form $y = f(x)$ between cartesian coordinates, and if we write

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{etc.},$$

we may write this integral invariant as follows;

$$(22) \quad p = \frac{-1}{3\sqrt[3]{2}} \int \sqrt[3]{\frac{9(y'')^2 y^{(5)} - 45 y'' y^{(3)} y^{(4)} + 40 (y^{(3)})^3}{y''}} dx,$$

where the meaning of each of the constituent parts will be easily recognized.

If we denote by s the length of arc, by r the radius of curvature, and if we write

$$r' = \frac{dr}{ds}, \quad r'' = \frac{d^2r}{ds^2}, \quad r''' = \frac{d^3r}{ds^3},$$

we find

$$(23) \quad p = \frac{1}{\sqrt[3]{6}} \int \sqrt[3]{\frac{r'''}{r} - \frac{r' r''}{r^2} + \frac{4}{9} \frac{(r')^3}{r^3} + 4 \frac{r'}{r^3}} ds.$$

Finally we may write

$$(24) \quad p = \int \frac{1}{\rho_0} \sqrt[3]{\frac{r_0}{2r}} ds,$$

where ρ_0 is the distance from a point P of the curve K to the center O of its osculating conic, and where r_0 is the radius of curvature at O of the locus which O describes as P moves along K .

The integral invariant p , and the related quantity κ , enable us to define what may be called the intrinsic cross-ratio of four points of a curve, and thus to transfer

the projective geometry of groups of points on a straight line to groups of points on a general curve. These variables also enable us to develop an intrinsic projective geometry which is the exact counterpart of intrinsic metric geometry in the particular form which has become familiar through the publications of CESÀRO. The intrinsic equation of a plane curve $\rho = f(s)$, which CESÀRO uses, is an equation between the simplest absolute metric differential and integral invariants of the curve. The simplest absolute projective differential invariant of a plane curve is θ_8^3/θ_3^8 ; its simplest projective integral invariant is the integral p . An equation between these two variables determines the curve except for projective transformations. But the further development of these and other applications of the notion of projective integral invariants must be left for the future.

The University of Chicago,
December 18, 1915.

E. J. WILCZYNSKI.

CURVE GENERATRICI E CURVE AGGREGATE NELLA COSTRUZIONE DI CURVE PIANE D'ORDINE ASSEGNATO DOTATE DEL MASSIMO NUMERO DI CIRCUITI.

Nota di **Luigi Brusotti** (Pavia).

Adunanza del 22 aprile 1917.

La presente Nota si collega ad alcune mie recenti ricerche ¹⁾ sulla « piccola variazione » di una curva piana algebrica reale spezzata e sulle applicazioni che ne discendono, con riguardo speciale al problema della determinazione di curve piane d'ordine assegnato $[= N]$, dotate del numero massimo $[= \frac{1}{2}(N-1)(N-2) + 1]$ di circuiti.

Fra i metodi costruttivi atti a fornire soluzioni di detto problema e da me introdotti accanto a quelli già noti di HARNACK e di HILBERT, meritano particolare rilievo i *metodi di moltiplicazione*.

Dicasi *base di rango h* , per una curva piana algebrica reale d'ordine n , un segmento di un circuito di essa contenente un gruppo di nh punti (reali, distinti) completa intersezione della curva stessa con una curva reale di ordine h . Dicasi *curva generatrice* una curva piana (d'ordine n) dotata del massimo numero di circuiti compatibile coll'ordine e fornita di due o più basi, due delle quali siano prive di punti comuni ed abbiano ranghi divisori rispettivamente di n e di $2n$. Da una tale curva, con successivi procedimenti di « piccola variazione » (*metodo di moltiplicazione*) si possono ricavare curve rispettivamente d'ordine $2n, 3n, \dots, qn, \dots$, sempre dotate del massimo numero di circuiti compatibile coll'ordine (*curve dedotte*).

¹⁾ a) *Sulla generazione delle curve piane di genere p dotate di $p+1$ circuiti* [Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Serie II^a, vol. XLIII (1910), pp. 143-156];

b) *Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante « piccola variazione » di una curva spezzata* [Annali di Matematica pura ed applicata, Serie III^a, Tomo XXII (1913), pp. 117-169];

c) *Nuovi metodi costruttivi di curve piane d'ordine assegnato dotate del massimo numero di circuiti*; Nota I^a [Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Serie II^a, vol. XLVII (1914), pp. 489-504]; Nota II^a [Ibid., vol. XLVII (1914), pp. 797-811]; Nota III^a [Ibid., vol. XLVIII (1915), pp. 182-196]; Nota IV^a [Ibid., vol. XLIX (1916), pp. 495-510]; Nota V^a [Ibid., vol. XLIX (1916), pp. 577-588]; Nota VI^a [Ibid., vol. XLIX (1916), pp. 905-918].

Per ogni valore dell'ordine n esistono tipi svariati di generatrici ²⁾ e ciascuno di essi, consentendo differenti applicazioni del metodo, dà luogo a numerosi tipi di dedotte ³⁾. Già per questa via risulta quindi come una curva i cui circuiti siano in numero massimo possa presentare, nella configurazione di questi, varietà assai maggiore di quanto fosse lecito indurre dalla sola conoscenza dei metodi di HARNACK e di HILBERT ⁴⁾.

Oggetto della presente Nota è un'estensione del metodo di moltiplicazione, nella quale rientrano tutti gli altri metodi conosciuti, cioè gli stessi metodi di HARNACK e di HILBERT e quelli da me altrove ⁵⁾ detti *della cubica ausiliare e della quartica ausiliare*.

Essa consiste nell'introdurre, insieme colla *curva generatrice* (d'ordine n), un'opportuna curva d'ordine r , pure dotata del massimo numero di circuiti compatibile coll'ordine (*curva aggregata*) [n° 1]. Per ogni valore di q è così consentita la costruzione non solo, in generale [¹⁴], di curve d'ordine qn , ma pur di curve d'ordine $qn + r$ sempre dotate del massimo numero di circuiti compatibile coll'ordine [n° 2, 3, 4, 5]. Del che presento effettivi esempi per n qualunque ed $r = 1, 2$; per $n = 2r$ ed r qualunque [n° 6].

Una generatrice d'ordine n che sia atta all'applicazione del metodo di moltiplicazione e possieda aggregate d'ordine r per ogni $r < n$, genera curve d'ordine qualsiasi e si dirà *generatrice completa*. Dimostro l'esistenza di generatrici complete per ogni valore dell'ordine $n < 6$ [n° 7, 8].

I. Siano C^n e W^r due curve piane dotate del massimo numero di circuiti compatibile coi rispettivi ordini n ed r , sottoposte inoltre alle condizioni seguenti:

I Le mutue intersezioni, tutte reali e distinte, siano ugualmente ordinate su di un circuito γ della C^n e su di un circuito τ della W^r .

II La C^n possieda due o più basi.

III Di queste almeno una, θ' , abbia rango d' divisore comune di n e di r , ed una, θ'' , abbia rango d'' divisore comune di $2n$ e di r .

IV Le θ' e θ'' non abbiano punti comuni.

V Qualora θ' sia su γ , essa appartenga ad uno fra i segmenti in cui γ è diviso dalle intersezioni con τ , anzi, per γ dispari e τ pari, a quello di *seconda specie* ⁶⁾ rispetto al circuito τ .

²⁾ loc. cit. ¹⁾ c); Nota IV^a, Nota V^a, Nota VI^a. Cfr. Nota I^a, §§ 2 e 4.

³⁾ loc. cit. ¹⁾ c); Nota I^a, § 1.

⁴⁾ Vedasi loc. cit. ¹⁾ c), specialmente in Nota II^a e Nota III^a e, per esemplificazioni, in Nota VI^a (§§ 18 e 19). Per la configurazione delle curve generate coi metodi di HARNACK e di HILBERT cfr.: V. RAGSDALE *On the Arrangement of the Real Branches of Plane Algebraic Curves* [American Journal of Mathematics, vol. XXVIII (1906). pp. 377-404].

⁵⁾ loc. cit. ¹⁾ a); §§ 4 e 5.

⁶⁾ Un segmento (di curva) avente gli estremi su di un circuito pari e giacente nella regione R esterna a questo, può dividere R in due regioni, oppure determinarvi una sola regione semplicemente

Esempi di curve siffatte saranno esposti più innanzi (n.º 6, 7, 8).

Dirò la C^n *curva generatrice* e la W^r *curva aggregata*.

2. Fissato un sistema di coordinate proiettive con elementi di riferimento reali, siano:

$$f_n = 0,$$

$$w_r = 0$$

le equazioni di C^n , W^r , liberate dagli eventuali fattori numerici complessi (come sempre si supporrà in casi analoghi).

Esiste una curva

$$g_{n+r} = 0,$$

reale, d'ordine $n + r$, avente le sue intersezioni con C^n tutte reali, distinte e raccolte su θ' . Infatti, essendo (n.º 1; III) $n + r$ multiplo di d' , la θ' , che è base di rango d' , è pur base di rango $n + r$ 7).

La:

$$f_{n+r} \equiv f_n w_r + t_1 g_{n+r} = 0,$$

per t_1 (reale) di valor assoluto abbastanza piccolo e di segno opportuno, rappresenta una curva K^{n+r} di ordine $n + r$, dotata del massimo numero di circuiti compatibile coll'ordine.

Invero (n.º 1; I) la C^n e la W^r formano una *coppia di tipo-B*), nel senso usato in miei precedenti lavori 8); e d'altra parte (n.º 1; V) la $g_{n+r} = 0$ soddisfa ai vincoli imposti dalla parità dei passaggi 9), che in questo caso basta verificare sulla sola C^n 10).

3. Esiste una curva

$$g_{2n+r} = 0,$$

reale, di ordine $2n + r$, avente le sue intersezioni con C^n tutte reali, distinte e raccolte su θ'' . Infatti, essendo (n.º 1; III) $2n + r$ multiplo di d'' , la θ'' , che è base di rango d'' , è pur base [7)] di rango $2n + r$.

La:

$$f_{2n+r} \equiv f_n f_{n+r} + t_2 g_{2n+r} = 0,$$

per t_2 (reale), di valor assoluto abbastanza piccolo e di segno opportuno, rappresenta una curva K^{2n+r} di ordine $2n + r$, dotata del massimo numero di circuiti compatibile coll'ordine.

Invero, per la scelta della $g_{n+r} = 0$, le intersezioni di K^{n+r} e di C^n sono tutte

connessa. Nei due casi dicesi rispettivamente di *prima* o di *seconda specie* (rispetto al circuito). Vedasi loc. cit. 1), b); n.º 2.

7) loc. cit. 1), c); Nota I^a, n.º 1.

8) loc. cit. 1), b), n.º 44.

9) loc. cit. 1), b), n.º 14, in fine. Si tenga presente la parità dei numeri n , r .

10) loc. cit. 1), b), n.º 13, in nota.

raccolte su θ' e, per il procedimento di « piccola variazione » del n° 2, ugualmente ordinate su θ' e sul prossimo segmento della K^{n+r} , onde C^n e K^{n+r} formano una coppia di tipo-B)- nel senso sopra indicato. Inoltre (n° 1; IV) sono soddisfatti per la $g_{2n+r} = 0$ i vincoli imposti dalla parità dei passaggi, riscontrata, come basta, sulla sola C^n [9), 10)].

4. Il procedimento iniziato nei n° 2 e 3 si può proseguire e dà luogo alla successione di equazioni:

$$\begin{aligned} f_{n+r} &\equiv f_n w_r & + t_1 g_{n+r} &= 0, \\ f_{2n+r} &\equiv f_n f_{n+r} & + t_2 g_{2n+r} &= 0, \\ f_{3n+r} &\equiv f_n f_{2n+r} & + t_3 g_{3n+r} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f_{qn+r} &\equiv f_n f_{(q-1)n+r} & + t_q g_{qn+r} &= 0, \end{aligned}$$

ove ogni volta il valore del parametro t_p è scelto col consueto criterio e la

$$g_{pn+r} = 0$$

rappresenta una curva reale, d'ordine $pn+r$, avente le intersezioni con C^n tutte reali, distinte e raccolte su θ' o su θ'' , secondo che p sia dispari o pari, curva la cui esistenza è garantita [7)] dalle condizioni poste (n° 1; III), essendo nei due casi $pn+r$ multiplo di d' o, rispettivamente, di d'' .

La

$$f_{qn+r} = 0$$

rappresenta una curva K^{qn+r} di ordine $qn+r$, dotata del massimo numero di circuiti compatibile coll'ordine.

5. Se C^n possiede più di due basi, nella determinazione di una $g_{pn+r} = 0$, all'uso della θ' o della θ'' , per $p > 1$, si può sostituire l'uso di una diversa base, purchè questa non abbia punti comuni con quella utilizzata nello stadio immediatamente precedente del procedimento ed inoltre possenga un rango divisore di $pn+r$.

Si osservi pure quanto segue.

Per il primo stadio del procedimento (n° 2) basta supporre che il rango d' di θ' sia divisore di $n+r$ e per il secondo stadio (n° 3) che il rango d'' di θ'' sia divisore di $2n+r$. La condizione riguardante i ranghi (n° 1; III) può dunque essere sostituita con altra meno restrittiva, quando il procedimento debba essere arrestato oppure ne sia altrimenti garantita la prosecuzione.

È particolarmente notevole il caso in cui n ed r siano entrambi dispari e $d' = 2$, quindi divisore di ogni $pn+r$ per p dispari.

6. Esempi di generatrici C^n atte all'applicazione del metodo qui esposto si presentano fra le generatrici già introdotte per i metodi di moltiplicazione ¹¹⁾.

¹¹⁾ Reciprocamente una generatrice dotata delle proprietà indicate al n° 1 è pure (ivi III) atta all'applicazione del metodo di moltiplicazione. Tali si presentano anche le generatrici del tipo introdotto al n° 5 in tutti gli esempi a me noti, benchè non sembri in questo caso possibile un'affermazione di carattere generale.

Così una *generatrice bifronte* ¹²⁾ d'ordine n qualunque ¹³⁾, quando si assuma come aggregata W^1 una retta *secante* una delle due fronti, può utilizzarsi non solo per la generazione di curve (dedotte) K^{qn} d'ordine qn , ma anche per quella di curve K^{qn+1} d'ordine $qn + 1$.

Una *generatrice trifronte* d'ordine n qualunque ¹⁴⁾, assumendosi come aggregate W^1 o W^2 rispettivamente una retta *secante* una delle tre fronti, od una conica opportunamente prossima al sistema di due rette *secanti* due fronti distinte e supposte su di uno stesso circuito, può generare non solo curve K^{qn} , ma anche curve K^{qn+1} , K^{qn+2} .

Lo stesso dicasi di generatrici (d'ordine n , qualunque) che *oltre ad una fronte lineare posseggano una fronte quadratica* ¹⁵⁾, quando si assumano come W^1 , W^2 rispettivamente una retta *secante* la fronte lineare, una conica *secante* la fronte quadratica e, nel caso n dispari, $r = 1$, si applichi l'osservazione esposta in fine del n° 5.

Senza trattenermi su esempi riguardanti particolari valori numerici di n ¹⁶⁾, accennerò ad un ultimo esempio di carattere generale. Esso si riferisce alla generatrice C^{2r} derivata ¹⁷⁾ dalla generatrice C^r (r qualunque) inerente ad un metodo di moltiplicazione comunque scelto. Invero la C^{2r} ammette come aggregata W^r la stessa C^r e quindi non solo genera curve K^{2qr} ma pure curve $K^{r(2q+1)r}$. Esse per la disposizione dei circuiti differiscono da quelle che direttamente si dedurrebbero dalla data C^r mediante moltiplicazione.

7. Merita particolare menzione il caso in cui la generatrice C^n ammetta curve aggregate W^r per ogni $r < n$ [e sia pure atta all'applicazione del metodo di moltiplicazione ($r = 0$)].

Poichè ogni intero si può porre sotto la forma $qn + r$ [$0 \leq r < n$], una tale generatrice è atta a generare curve di ogni ordine. Essa perciò verrà detta *generatrice completa*.

Per ogni $n < 6$ esistono generatrici complete; non risulta se ne esistano per $n \geq 6$.

In primo luogo una retta (reale), una conica (a punti reali) sono generatrici complete, perchè ogni segmento di retta o di conica è una base di rango 1, anzi una

¹²⁾ Dico *fronte (lineare)* un segmento appartenente ad un circuito di una curva (reale) d'ordine n ed incontrato da una retta reale [*secante*] in n punti distinti, ugualmente ordinati sul segmento e sulla retta. Dico *bifronte* (rispettivamente *trifronte*) una curva dotata di due (rispettivamente di tre) fronti prive di punti comuni.

¹³⁾ loc. cit. ¹⁾ c); Nota IV^a; cfr. loc. cit. ¹⁾ a); § 2.

¹⁴⁾ loc. cit. ¹⁾ c); Nota V^a, § 16; cfr. loc. cit. ¹⁾ a), § 2, n° 5.

¹⁵⁾ loc. cit. ¹⁾ c); Nota V^a, § 17. La definizione di *fronte quadratica* è analoga a quella di fronte lineare, sostituita alla retta reale una conica a punti reali (*conica secante*).

¹⁶⁾ I più interessanti fra questi figureranno con altro scopo ai n° 7. 8. — Qui osserverò soltanto come la C^6 descritta al § 19 della ricordata Nota VI^a [loc. cit. ¹⁾ c)] ammetta aggregate W^1 , W^2 , W^3 e sia quindi atta a generare non solo curve K^{6q} ma pure curve K^{6q+1} , K^{6q+2} , K^{6q+3} .

¹⁷⁾ loc. cit. ¹⁾ c); Nota I^a, § 2.

fronte. Ma la relativa applicazione riconduce ai noti metodi di HARNACK e di HILBERT, che vengono così a presentarsi come casi particolari di quello qui esposto.

L'esistenza di generatrici complete d'ordine 3 è implicita negli enunciati del n° precedente ed è sostanzialmente già nota ¹⁸⁾.

Per $n = 4$, ricordo la generatrice C^4 , altrove ¹⁹⁾ descritta, dotata di sei basi, di cui quattro (collocate rispettivamente sui quattro circuiti) sono fronti lineari e due (collocate su due diversi circuiti) sono fronti quadratiche. Sono aggregate W^1 , W^2 rispettivamente una retta *secante* una delle fronti lineari, una conica *secante* una delle fronti quadratiche. È una aggregata W^3 la cubica dedotta per « piccola variazione » dal sistema di una retta e di una conica *secanti* rispettivamente la fronte lineare e quella quadratica di uno stesso circuito di C^4 , in modo che i segmenti della cubica prossimi alle dette fronti appartengano al suo ovale. La C^4 è dunque una generatrice completa ²⁰⁾.

Al caso $n = 5$, che richiede più minuto esame ²¹⁾, è dedicato il n° seguente.

8. Sia

$$F_3 = 0$$

l'equazione di un'ordinaria generatrice trifronte del terzo ordine. Siano:

$$\chi' = 0, \quad \chi'' = 0, \quad \chi''' = 0$$

le equazioni di tre rette *secanti* rispettivamente le tre fronti.

Ciascuna *secante* è divisa dalle intersezioni colle rimanenti in due segmenti, sopra uno dei quali sono raccolte le intersezioni colla $F_3 = 0$. L'altro si dirà brevemente il segmento *estraneo*.

Ciò posto, sia:

$$G_5 = 0$$

l'equazione complessiva di cinque rette prossime a $\chi''' = 0$, scelte in modo che le loro intersezioni con $\chi' = 0$, $\chi'' = 0$, $F_3 = 0$ risultino tutte distinte ed in particolare quelle con $\chi' = 0$, $\chi'' = 0$ appartengano ai rispettivi segmenti *estranei*.

La:

$$F_5 \equiv \chi' \chi'' F_3 + t G_5 = 0,$$

per t (reale) di valore assoluto abbastanza piccolo e di segno opportuno, rappresenta una curva C^5 d'ordine cinque, dotata di sette circuiti, come risulta dalle mutue posizioni di $\chi' = 0$, $\chi'' = 0$, $F_3 = 0$ ²²⁾.

¹⁸⁾ loc. cit. ¹⁾ a); § 4 (metodo della cubica ausiliare).

¹⁹⁾ loc. cit. ¹⁾ c); Nota VI^a (n° 69 e Tav. I^a).

²⁰⁾ Si confronti pure: loc. cit. ¹⁾ a); § 5 (metodo della quartica ausiliare).

²¹⁾ La generatrice C^5 descritta al n° 77 della già citata Nota VI^a [¹⁾ c)] ammette aggregate W^1 , W^2 , W^3 ; non risulta che ammetta un'aggregata W^4 . Con lieve modificazione della « piccola variazione » ivi utilizzata, si potrebbe costruire una C^5 che ammetta aggregate W^1 , W^2 , W^4 ; ma per questa non risulterebbe l'esistenza della W^3 .

²²⁾ Esse formano una terna di tipo-C) nel senso da me usato altrove [loc. cit. ¹⁾, b) n° 44].

Dico che (per $|t|$ abbastanza piccolo) tale C^5 è *generatrice completa*.

Osservo intanto come il circuito dispari di C^5 , per $|t|$ abbastanza piccolo, possieda tre fronti lineari $\zeta', \zeta'', \zeta'''$, di cui sono rispettivamente *secanti* le $\chi' = 0$, $\chi'' = 0$, $\chi''' = 0$. Le prime due sono prodotte dal comportamento della $G_5 = 0$; la terza proviene dall'opportuno collegamento dei tre segmenti della C^5 prossimi rispettivamente alla terza fronte di $F_3 = 0$, al segmento estraneo di $\chi' = 0$, a quello di $\chi'' = 0$.

Segue che la C^5 ammette come aggregata W^1 la $\chi'' = 0$, e come aggregata W^2 la:

$$\chi''\chi''' + t'G_2 = 0,$$

ove $G_2 = 0$ sia una conica reale a punti immaginari e t' , di valore assoluto abbastanza piccolo, sia scelto di segno tale da assicurare il diretto collegamento dei segmenti prossimi a quelli estranei di $\chi'' = 0$, $\chi''' = 0$.

La C^5 ammette inoltre come aggregata W^3 la $F_3 = 0$, e come aggregata W^4 la:

$$\chi''F_3 + t''G_4 = 0,$$

ove $G_4 = 0$ sia una quartica reale a punti immaginari e t'' abbia valore assoluto abbastanza piccolo e segno opportuno.

Nei casi indicati sempre si può porre $\theta' \equiv \zeta'$, $\theta'' \equiv \zeta''$, pur presentandosi possibili altre scelte delle basi.

Sono W^1 anche le $\chi' = 0$, $\chi''' = 0$ e si ottengono W^2 e W^4 pur utilizzando la $\chi' = 0$, anzichè la $\chi'' = 0$.

La C^5 è dunque generatrice completa ed in più modi.

Pavia, marzo 1917.

LUIGI BRUSOTTI.

CERTAIN SURFACES OF VOSS AND SURFACES ASSOCIATED WITH THEM.

by **Luther Pfahler Eisenhart** (Princeton, N. J.).

Adunanza del 10 dicembre 1916.

In a recent memoir published in these Rendiconti ¹⁾ BIANCHI has studied at length a class of surfaces defined as follows. We take any surface S and a point O fixed in space. At each point M of S we consider the trihedral of the normal and the tangents to the lines of curvature. When the vertex M of the trihedral moves over the surface S , the point O assumes, with respect to the trihedral, a series of positions, which in general constitute a surface, called the tractrix surface for S and O . The surfaces studied by BIANCHI are those which admit as a tractrix a quadric which has the planes of the trihedral for planes of symmetry. These surfaces depend essentially on pseudospherical congruences, defined by the property that the distances between the limit points and between the focal points are constant. In fact, the normals to these surfaces are parallel to the rays of a pseudospherical congruence, and moreover the lines of curvature of the surfaces correspond to the asymptotic lines on the focal surfaces of the congruence. There are different types of these surfaces determined by the character of the quadric tractrix. Most of the types belong to a general class of surfaces discussed by the author in a former number of these Rendiconti ²⁾. We established in particular a transformation of surfaces of Voss into surfaces of Voss, such that the lines joining corresponding points on a surface and a transform form a congruence meeting the two surfaces in their geodesic conjugate systems. In this case we say that the two surfaces are in the relation of a transformation Ω . We showed further that the lines of intersection of corresponding tangent planes to two surfaces in this relation form a normal congruence, that the lines of this congruence

¹⁾ L. BIANCHI, *Sopra una classe di superficie collegate alle congruenze pseudosferiche* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XL (2° semestre 1915), pp. 110-152].

²⁾ L. P. EISENHART, *Conjugate systems with equal Tangential Invariants and the Transformation of MOUTARD* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXIX (1° semestre 1915), pp. 153-176].

In what follows this memoir will be referred to as M.

are parallel to the rays of a pseudospherical congruence, and that the developables of the former congruence correspond to the asymptotic lines on the focal surfaces of the latter. In certain cases the surfaces orthogonal to these normal congruences are of the class considered by BIANCHI, and it is the purpose of this paper to investigate these surfaces from this point of view.

If Σ is a surface of the type under consideration, one knows how to draw planes through the normals to Σ such that these planes envelope a surface of Voss. In general two surfaces of Voss are obtained in this manner. They are special surfaces of Voss, characterized by the property that if W denotes the distance from the origin to the tangent planes to the surface, then W is a solution of a completely integrable system of three partial differential equations of the second order. Conversely, each solution of this system determines a special surface of Voss, and the determination of the solutions of the system is the same analytical problem as that of finding the BÄCKLUND transformations of pseudospherical surfaces. When such a surface is known, it is possible to draw in its tangent planes lines forming a normal congruence met orthogonally by surfaces Σ . Moreover, the analytical determination of these congruences is the same problem as finding the BÄCKLUND transformations of the pseudospherical surface whose asymptotic lines have the same spherical representation as the geodesic conjugate system on the given surface of Voss.

The tangents to the curves of either family of the geodesic conjugate system on a special surface of Voss are normal to a surface Σ with a quadric of revolution for tractrix. As thus given Σ is a surface of GUICHARD, and it is readily shown that the other focal surface of the accompanying congruence of GUICHARD is of the same type.

We establish two types of Transformations of RIBAUCCOUR of these surfaces Σ , and for certain types the transforms by reciprocal radii are surfaces of the same kind. At the same time these transformations carry with them certain induced transformations of special surfaces of Voss.

1. *Equations of a surface V and preliminary formulas.* — We consider a surface V referred to the geodesic conjugate system. Since this system has the same spherical representation as the asymptotic lines on a pseudospherical surface P , the linear element of this spherical representation can be given the form

$$(1) \quad d\sigma^2 = du^2 + 2 \cos 2\omega du dv + dv^2 \quad ^3),$$

where ω is a function of u and v satisfying the equation

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \sin \omega \cos \omega = 0.$$

If X_1, Y_1, Z_1 , and X_2, Y_2, Z_2 , denote respectively the direction-cosines of the bisectors of the angles between the parametric curves of the spherical representation,

³⁾ The formulas of this section can be obtained from those of §§ 1, 3, M, by taking $\rho = \text{const.}$

and X, Y, Z , the direction-cosines of the normal to a surface V with this representation, we have

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial u} X_2 - \sin \omega X, & \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial v} X_2 + \sin \omega X, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial u} X_1 - \cos \omega X, & \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \omega}{\partial v} X_1 - \cos \omega X, \\ \frac{\partial X}{\partial u} = \sin \omega X_1 + \cos \omega X_2, & \frac{\partial X}{\partial v} = -\sin \omega X_1 + \cos \omega X_2. \end{cases}$$

The tangential coordinates of V , namely X, Y, Z and W , satisfy the equation

$$(4) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} + \cos 2\omega \cdot W = 0.$$

In terms of the tangential coordinates the rectangular coordinates, x, y, z , of V are expressible in the form

$$(5) \quad x = WX + \frac{1}{\sin 2\omega} \left[X_1 \cos \omega \left(\frac{\partial W}{\partial u} - \frac{\partial W}{\partial v} \right) + X_2 \sin \omega \left(\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial v} \right) \right].$$

From these we obtain

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{D}{\sin 2\omega} (\cos \omega X_1 + \sin \omega X_2), \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{D''}{\sin 2\omega} (\cos \omega X_1 - \sin \omega X_2), \end{cases}$$

where

$$(7) \quad \begin{cases} D = -\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + 2 \cot 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial u} - \frac{2}{\sin 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial v} - W, \\ D'' = -\frac{\partial^2 W}{\partial v^2} - \frac{2}{\sin 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial u} + 2 \cot 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial v} - W. \end{cases}$$

The CODAZZI equations for V are

$$(8) \quad \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{2}{\sin 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} D'' = 0, \quad \frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{2}{\sin 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial v} D = 0.$$

When the surface P is subjected to a BÄCKLUND transformation, the linear element of the spherical representation of the asymptotic lines on the new surface P_1 is given by

$$(9) \quad d\sigma_1^2 = du^2 + 2 \cos 2\theta du dv + dv^2,$$

where θ is a solution of equation (2) satisfying also the equations

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \omega}{\partial u} = -\cot \frac{\sigma}{2} \sin(\theta + \omega), \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial v} = \tan \frac{\sigma}{2} \sin(\theta - \omega), \end{cases}$$

σ being the constant angle between the tangent planes to P and P_1 at corresponding points. The intersection of these planes passes through P and P_1 , and its direction-cosines \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} , are of the form

$$(11) \quad \bar{X} = \cos \theta X_1 + \sin \theta X_2.$$

Moreover, the direction-cosines of the normal to P_1 and of the bisectors of the angles between the parametric curves on the spherical representation of P_1 are of the form

$$(12) \quad \begin{cases} X' = \cos \sigma X + \sin \sigma (\sin \theta X_1 - \cos \theta X_2), \\ X'_1 = \sin \omega [\cos \sigma (\sin \theta X_1 - \cos \theta X_2) - \sin \sigma X] - \cos \omega \bar{X}, \\ X'_2 = -\cos \omega [\cos \sigma (\sin \theta X_1 - \cos \theta X_2) - \sin \sigma X] - \sin \omega \bar{X}. \end{cases}$$

2. Transformations Ω of surfaces V . Normal harmonic congruences.

From the theory ⁴⁾ of transformations Ω it follows that X' , Y' , Z' and W_1 , defined by

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial u}(W_1 w) = -w^2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{W}{w} \right), \quad \frac{\partial}{\partial v}(W_1 w) = w^2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{W}{w} \right),$$

where w is any solution of (4), are the tangential coordinates of a surface of Voss, say V_1 , such that the developables of the congruence of joins of corresponding points on V and V_1 meet the latter in the parametric geodesic conjugate system. The direction-cosines of the line L of intersection of the tangent planes to P and P_1 are necessarily \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} , given by (11). We are interested particularly in the case where the congruence of lines L is normal, and this is the only case which will be considered hereafter. We call it the *harmonic congruence*.

The necessary and sufficient condition that the congruence of lines L be normal to a surface, say Σ , is that the function w shall be defined by

$$(14) \quad \frac{\partial \log w}{\partial u} = \cot \frac{\sigma}{2} \cos(\theta + \omega), \quad \frac{\partial \log w}{\partial v} = -\tan \frac{\sigma}{2} \cos(\theta - \omega),$$

where θ and σ are any solutions of equations (10) ⁵⁾. In this case equations (13) are reducible to

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial u} = (W - W_1) \cot \frac{\sigma}{2} \cos(\theta + \omega) - \frac{\partial W}{\partial u}, \\ \frac{\partial W_1}{\partial v} = (W + W_1) \tan \frac{\sigma}{2} \cos(\theta - \omega) + \frac{\partial W}{\partial v}. \end{cases}$$

The rectangular coordinates a_1 , b_1 , c_1 ; a_2 , b_2 , c_2 , of the focal points F_1 , F_2 , of this congruence are of the respective forms

$$(16) \quad a_1 = x + T \frac{\cos \omega X_1 + \sin \omega X_2}{\sin(\theta - \omega)}, \quad a_2 = x + T \frac{\cos \omega X_1 - \sin \omega X_2}{\sin(\theta + \omega)},$$

⁴⁾ The results of this section follow from §§ 3, 5 and 6, M., when we take $\rho = \rho_1 = 1$.

⁵⁾ 1. c. ²⁾ n° 86.

where

$$(17) \quad T = \frac{W_1 - W \cos \sigma}{\sin \sigma} - \frac{\sin(\theta - \omega)}{\sin 2\omega} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\sin(\theta + \omega)}{\sin 2\omega} \frac{\partial W}{\partial v} \quad ^6).$$

From the theory of normal congruences it follows that the normals to the focal surfaces which are the loci of F_1 and F_2 are parallel to the tangents to the lines of curvature on Σ , which as a matter of fact correspond to the geodesic system on V and consequently are parametric. Hence if $\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1; \bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2$ denote the direction-cosines of the tangents to the curves $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ respectively on Σ , we find that

$$(18) \quad \begin{cases} \bar{X}_1 = \cos \frac{\sigma}{2} (\sin \theta X_1 - \cos \theta X_2) - \sin \frac{\sigma}{2} X, \\ \bar{X}_2 = -\sin \frac{\sigma}{2} (\sin \theta X_1 - \cos \theta X_2) - \cos \frac{\sigma}{2} X. \end{cases}$$

From (11) we obtain by differentiation

$$(19) \quad \frac{\partial \bar{X}}{\partial u} = \sqrt{E} \bar{X}_1, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \sqrt{G} \bar{X}_2,$$

where

$$(20) \quad \sqrt{E} = \frac{\sin(\theta + \omega)}{\sin \frac{\sigma}{2}}, \quad \sqrt{G} = \frac{\sin(\theta - \omega)}{\cos \frac{\sigma}{2}}, \quad F = 0.$$

Evidently E, F and G are the coefficients of the spherical representation of Σ . It is readily found that

$$(21) \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \cos(\theta + \omega), \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = -\cos(\theta - \omega).$$

We express the rectangular coordinates ξ, η, ζ of Σ in the form

$$(22) \quad \xi = \bar{W} \bar{X} + \bar{W}_1 \bar{X}_1 + \bar{W}_2 \bar{X}_2,$$

where \bar{W}_1 and \bar{W}_2 are to be determined. Since these functions are evidently tangential coordinates of the loci of F_1 and F_2 respectively, we have

$$(23) \quad \bar{W}_1 = \sum \bar{X}_1 a_i = \frac{W_1 - W}{2 \sin \frac{\sigma}{2}}, \quad \bar{W}_2 = \sum \bar{X}_2 a_i = -\frac{W_1 + W}{2 \cos \frac{\sigma}{2}}.$$

From these equations we find

$$(24) \quad \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \bar{W}_2, \quad \frac{\partial \bar{W}_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \bar{W}_1,$$

⁶⁾ (Cfr. l. c. ²⁾), n^o 78-80.

and from (18)

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \bar{X}_2 - \sqrt{E} \bar{X}, & \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \bar{X}_2, \\ \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \bar{X}_1, & \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \bar{X}_1 - \sqrt{G} \bar{X}. \end{cases}$$

Equations of the form (22) serve to define any surface referred to its lines of curvature. Equations (24) and (25) hold in this general case, as do also

$$(26) \quad \frac{\partial \bar{W}}{\partial u} = \sqrt{E} \bar{W}_1, \quad \frac{\partial \bar{W}}{\partial v} = \sqrt{G} \bar{W}_2,$$

and

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial u} = \left(\frac{\partial \bar{W}_1}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \bar{W}_2 + \sqrt{E} \bar{W} \right) \bar{X}_1, \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} = \left(\frac{\partial \bar{W}_2}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \bar{W}_1 + \sqrt{G} \bar{W} \right) \bar{X}_2. \end{cases}$$

3. *Surfaces V_0 and surfaces Σ_0 .*—The function w defined by equations (14) is a solution of (4), and consequently there exists a surface V_0 whose tangential coordinates are X, Y, Z, w . We inquire under what conditions a surface of Voss is so defined.

If equations (14) are differentiated with respect to both u and v , we note that w satisfies the system

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} - 2 \cot 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial u} - 2 \frac{B}{A} \frac{1}{\sin 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial v} - \frac{B}{A} W = 0, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} + \cos 2\omega W = 0, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} - 2 \frac{A}{B} \frac{1}{\sin 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial u} - 2 \cot 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial v} - \frac{A}{B} W = 0, \end{cases}$$

where A and B are positive constants such that

$$(29) \quad A \cot \frac{\sigma}{2} = B \tan \frac{\sigma}{2}.$$

Comparing this result with (7), we see that the second fundamental functions of V_0 are of the form

$$(30) \quad \begin{cases} D = -\left(1 + \frac{B}{A}\right) \left(W + \frac{2}{\sin 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial v}\right), \\ D'' = -\left(1 + \frac{A}{B}\right) \left(W + \frac{2}{\sin 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial u}\right). \end{cases}$$

It is readily seen that these values satisfy the CODAZZI equations (8) in consequence of (28).

When equations (14) are solved for $\sin \theta$ and $\cos \theta$, we get

$$(31) \quad \begin{cases} \sin \theta = -\frac{1}{2 \sin \omega} \left(\tan \frac{\sigma}{2} \frac{\partial \log w}{\partial u} + \cot \frac{\sigma}{2} \frac{\partial \log w}{\partial v} \right), \\ \cos \theta = \frac{1}{2 \cos \omega} \left(\tan \frac{\sigma}{2} \frac{\partial \log w}{\partial u} - \cot \frac{\sigma}{2} \frac{\partial \log w}{\partial v} \right). \end{cases}$$

Squaring and adding, we observe that for w defined by (14) the function Φ , defined by

$$(32) \quad \Phi = W^2 - \frac{1}{\sin^2 2\omega} \left[\frac{A}{B} \left(\frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + 2 \cos 2\omega \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial v} + \frac{B}{A} \left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 \right],$$

vanishes. As a matter of fact, it is readily shown that for any function W satisfying (28) the first derivatives of Φ are zero, so that Φ is a constant.

Suppose now that we have any solution of equations (28) for which Φ is zero. It is easily shown that σ given by (29) and θ defined by (31) satisfy equations (10). Accordingly we say that every surface of Voss whose tangential coordinate W satisfies equations (28) and makes Φ zero is a surface V_0 .

Suppose we have a surface V_0 and apply to it the transformation determined by the function w of the surface itself. From (13) it follows that $W_1 = c/w$, where c is a constant. In this case equations (23) are

$$(33) \quad \bar{W}_1 = \frac{\frac{c}{w} - w}{2 \sin \frac{\sigma}{2}}, \quad \bar{W}_2 = -\frac{\frac{c}{w} + w}{2 \cos \frac{\sigma}{2}}.$$

From these expressions we have

$$(34) \quad A \bar{W}_1^2 - B \bar{W}_2^2 = \text{const.}$$

Consequently we have

THEOREM I. — *When a surface V_0 is subjected to the transformation Ω determined by the function w of the surface itself, the tractrix surface of a surface Σ normal to the harmonic congruence of the transformation is a hyperbolic cylinder whose axis is the normal to Σ .*

4. *When the tractrix surface is a paraboloid.* — We consider now the case when the tractrix surface is a paraboloid with an equation of the form

$$(35) \quad A \bar{W}_1^2 - B \bar{W}_2^2 - 2b \bar{W} = 0.$$

If this equation be differentiated separately with respect to u and v , the resulting equations are reducible by means of (15), (23), (24) and (26) to

$$(36) \quad \begin{cases} \left[W_1 \left(\cot \frac{\sigma}{2} A - \tan \frac{\sigma}{2} B \right) - W \left(\cot \frac{\sigma}{2} A + \tan \frac{\sigma}{2} B \right) \right] \frac{\cos(\theta + \omega)}{2} \\ \quad + A \frac{\partial W}{\partial u} + b \sin(\theta + \omega) = 0, \\ \left[W_1 \left(\cot \frac{\sigma}{2} A - \tan \frac{\sigma}{2} B \right) - W \left(\cot \frac{\sigma}{2} A + \tan \frac{\sigma}{2} B \right) \right] \frac{\cos(\theta - \omega)}{2} \\ \quad - B \frac{\partial W}{\partial v} + b \sin(\theta - \omega) = 0. \end{cases}$$

Eliminating the first parenthesis from these equations, we obtain

$$(37) \quad A \cos(\theta - \omega) \frac{\partial W}{\partial u} + B \cos(\theta + \omega) \frac{\partial W}{\partial v} + h \sin 2\omega = 0.$$

Likewise the elimination of h gives

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sin 2\omega}{\sin \sigma} \left[W_1 \left(\cos^2 \frac{\sigma}{2} A - \sin^2 \frac{\sigma}{2} B \right) - W \left(\cos^2 \frac{\sigma}{2} A + \sin^2 \frac{\sigma}{2} B \right) \right] - \\ & - A \sin(\theta - \omega) \frac{\partial W}{\partial u} - B \sin(\theta + \omega) \frac{\partial W}{\partial v} = 0. \end{aligned} \right.$$

When we express the condition that this value of W_1 shall satisfy (15), we get, in consequence of (7), the expressions (30) for D and D' . When these values of D and D' are substituted in (7), we find that W must satisfy equations (28).

Making use of this fact, we differentiate (37) separately with respect to u and v . The resulting equations are consistent only in case σ satisfies (29), and then they are equivalent to the single equation

$$(39) \quad A \sin(\theta - \omega) \frac{\partial W}{\partial u} + B \sin(\theta + \omega) \frac{\partial W}{\partial v} + A \cot \frac{\sigma}{2} \sin 2\omega W = 0.$$

However, when σ satisfies (29), the coefficient of W_1 in (38) vanishes, and consequently the foregoing investigation does not justify us in concluding that W is a solution of the system (28). Nevertheless we shall find that this is the case.

On the assumption that σ satisfies (29) equations (36) become

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u} &= \cot \frac{\sigma}{2} \cos(\theta + \omega) W - \frac{h}{A} \sin(\theta + \omega), \\ \frac{\partial W}{\partial v} &= -\tan \frac{\sigma}{2} \cos(\theta - \omega) W + \frac{h}{B} \sin(\theta - \omega). \end{aligned} \right.$$

When these expressions for $\frac{\partial W}{\partial u}$ and $\frac{\partial W}{\partial v}$ are substituted in (37) and (39), these equations are satisfied identically. Moreover, if these expressions are differentiated and the results are substituted in (28), the latter are satisfied, in consequence of (10). And from (32) we have

$$(41) \quad \Phi = -\frac{h^2}{AB}.$$

If equations (40) are solved for $\sin \theta$ and $\cos \theta$, we get

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} (ABW^2 + h^2) \sin 2\omega \sin \theta &= -A(B \tan \frac{\sigma}{2} W \cos \omega + h \sin \omega) \frac{\partial W}{\partial u} - \\ &\quad - B(A \cot \frac{\sigma}{2} W \cos \omega + h \sin \omega) \frac{\partial W}{\partial v}, \\ (ABW^2 + h^2) \sin 2\omega \cos \theta &= A(B \tan \frac{\sigma}{2} W \sin \omega - h \cos \omega) \frac{\partial W}{\partial u} - \\ &\quad - B(A \cot \frac{\sigma}{2} W \sin \omega + h \cos \omega) \frac{\partial W}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Squaring and adding, we get (41). On the assumption that W is a solution of the

system (28), σ given by (29) and θ by (42) satisfy equations (10). If $\Phi = 0$, we have the case of § 3. If $\Phi \neq 0$, we determine h by (41) and the conditions of the present section are satisfied.

The *special surfaces of Voss* determined by solutions W of (28) are called V_h , where h denotes the constant obtained from (41).

From the above results follows

THEOREM 2. — *Each solution of equations (10) determines a family of surfaces V_h , h being the parameter of the family; these surfaces are obtained by quadrature.*

Assume that we have a surface V_h for which $h \neq 0$, and that we have determined σ and θ by (29) and (42). There exists a function w given by (14) for these values of σ and θ . We use this w to determine a transformation Ω of V_h .

Substituting the values from (40) in (13), we get for the determination of W ,

$$\frac{\partial}{\partial u}(W, w) = \frac{h}{A} w \sin(\theta + \omega), \quad \frac{\partial}{\partial v}(W, w) = \frac{h}{B} w \sin(\theta - \omega).$$

We define a function T by the quadratures

$$(43) \quad \frac{\partial T}{\partial u} = \cos \frac{\sigma}{2} \sqrt{E} w, \quad \frac{\partial T}{\partial v} = \sin \frac{\sigma}{2} \sqrt{G} w,$$

which are readily found to be consistent. Hence we have, to within an additive constant,

$$(44) \quad W, w = \tan \frac{\sigma}{2} T \frac{h}{A}.$$

From (35), (33) and (44) we get

$$(45) \quad \bar{W} = - \frac{TW}{w \sin \sigma}.$$

Reviewing the preceding results, we note that when a solution of equations (10) is known, we can find by quadratures functions W , w and T , whence we obtain a surface Σ with a hyperbolic paraboloid for tractrix. In other words we have

THEOREM 3. — *The determination of surfaces Σ with a hyperboloid paraboloid or a hyperbolic cylinder for tractrix, as given by (35) or (34), is equivalent to the determination of BÄCKLUND transformations of pseudospherical surfaces.*

5. *Complete solution of equations (28).* — The system of equations (28) is completely integrable, and consequently any solution is linearly expressible in terms of three linearly independent solutions. We investigate this problem in the light of the preceding results.

Since Φ is a constant for any solution of the system, it follows that if W and W' are two solutions, the function Ψ defined by

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi = WW' - \frac{1}{\sin^2 2\omega} \left[\frac{A}{B} \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial W'}{\partial u} \right. \\ \left. + \cos 2\omega \left(\frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial W'}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial W'}{\partial u} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial W'}{\partial v} \right] \end{aligned} \right.$$

is a constant.

If θ_1 and θ_2 are two solutions of equations (10) in which σ is given by (29), the two functions w_1 and w_2 defined by

$$(47) \quad \frac{\partial \log w_i}{\partial u} = \cot \frac{\sigma}{2} \cos(\theta_i + \omega), \quad \frac{\partial \log w_i}{\partial v} = -\tan \frac{\sigma}{2} \cos(\theta_i - \omega) \quad (i=1, 2),$$

are solutions of (28). When they are substituted in (46), we get

$$(48) \quad w_1 w_2 [1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)] = \text{const.}$$

If we take the logarithmic derivative of this equation, it is satisfied identically. Hence when θ_2 and w_1 are known, w_2 follows directly.

Suppose now that we have a third solution θ_3 of (10) for the same value of σ , and w_3 denotes the function given by (47) with $i=3$. Since the left hand member of (48) cannot be equal to zero, w_3 is not a linear combination of w_1 and w_2 . Thus w_1, w_2, w_3 are three linearly independent solutions of (28) in terms of which any solution is linearly expressible. Since equations (10) are reducible to the RICCATI form, when a solution is known, the others can be found by quadratures. Reviewing the preceding results, we have.

THEOREM 4. — *The complete solution of the system (28) is reducible to the integration of a RICCATI equation and quadratures.*

If we put

$$(49) \quad W = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3,$$

where the a 's are constants, equations (42) become

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[(\sum a_i w_i)^2 + \frac{h^2}{AB} \right] \cos \theta &= \sum a_i w_i \cos \theta_i \cdot \sum a_i w_i \\ &\quad + \frac{\cot \sigma/2}{B} h \sum a_i w_i \sin \theta_i, \\ \left[(\sum a_i w_i)^2 + \frac{h^2}{AB} \right] \sin \theta &= \sum a_i w_i \sin \theta_i \cdot \sum a_i w_i - \\ &\quad - \frac{\cot \sigma/2}{B} h \sum a_i w_i \cos \theta_i. \end{aligned} \right.$$

Squaring and adding, we get

$$(51) \quad \sum a_i a_j w_i w_j [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)] + \frac{h^2}{AB} = 0 \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, 3 \\ j=1, 2, 3 \\ i \neq j \end{matrix} \right),$$

which is consistent with (41) and (48). With the aid of (51) we show that θ defined by (50) satisfies (10).

6. *When the tractrix is a central quadric.* — We consider in this section the case when the tractrix surface is a central quadric with the equation

$$(52) \quad A \bar{W}_1^2 - B \bar{W}_2^2 + C \bar{W} = K,$$

where A, B, C and K are constants.

If this equation be differentiated separately with respect to u and v , the resulting equations are reducible by means of (15), (23), (24) and (26) to

$$(53) \left\{ \begin{aligned} & \overline{W} \sin(\theta + \omega) - \frac{A}{C} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\cos(\theta + \omega)}{\sin \sigma} \times \\ & \times \left[W_1 \left(\frac{B}{C} \sin^2 \frac{\sigma}{2} - \frac{A}{C} \cos^2 \frac{\sigma}{2} \right) + W \left(\frac{B}{C} \sin^2 \frac{\sigma}{2} + \frac{A}{C} \cos^2 \frac{\sigma}{2} \right) \right] = 0, \\ & \overline{W} \sin(\theta - \omega) + \frac{B}{C} \frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\cos(\theta - \omega)}{\sin \sigma} \times \\ & \times \left[W_1 \left(\frac{B}{C} \sin^2 \frac{\sigma}{2} - \frac{A}{C} \cos^2 \frac{\sigma}{2} \right) + W \left(\frac{B}{C} \sin^2 \frac{\sigma}{2} + \frac{A}{C} \cos^2 \frac{\sigma}{2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Eliminating \overline{W} from these equations, we get (38), from which, as we have seen, it follows that W must be a solution of (28), provided that the constant a defined by

$$\frac{A}{C} \cos^2 \frac{\sigma}{2} - \frac{B}{C} \sin^2 \frac{\sigma}{2} = a$$

is not equal to zero.

Equations (53) are equivalent to (38) and

$$(54) \quad \overline{W} = \frac{A \cos(\theta - \omega)}{C \sin 2\omega} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{B \cos(\theta + \omega)}{C \sin 2\omega} \frac{\partial W}{\partial v}.$$

From (23) and (38) we have also

$$(55) \left\{ \begin{aligned} & a \overline{W}_1 = \frac{B}{C} \sin \frac{\sigma}{2} W + \frac{\cos \frac{\sigma}{2}}{\sin 2\omega} \times \\ & \times \left(\frac{A}{C} \sin(\theta - \omega) \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{B}{C} \sin(\theta + \omega) \frac{\partial W}{\partial v} \right), \\ & a \overline{W}_2 = - \frac{A}{C} \cos \frac{\sigma}{2} W - \frac{\sin \frac{\sigma}{2}}{\sin 2\omega} \times \\ & \times \left(\frac{A}{C} \sin(\theta - \omega) \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{B}{C} \sin(\theta + \omega) \frac{\partial W}{\partial v} \right). \end{aligned} \right.$$

In order that these values satisfy equations (24) and (26), we must have $a = 1$, and consequently σ must satisfy

$$(56) \quad A \cos^2 \frac{\sigma}{2} - B \sin^2 \frac{\sigma}{2} = C.$$

Assuming that these conditions are satisfied, we substitute the above values of \overline{W} , \overline{W}_1 , \overline{W}_2 , in (52), and obtain

$$(57) \quad \Phi = - \frac{CK}{AB}.$$

Hence the tractrix surface is a hyperboloid or a cone, according as W is a solution of equations (28) for which Φ is different from or equal to zero. Accordingly we have:

THEOREM 5. — If W is a solution of equations (28), σ a constant angle not satisfying (29), and θ any solution of equations (10) in which σ has this value, equations (12) and (38) determine a transform of the surface of Voss corresponding to W . The harmonic normal congruence is normal to a surface Σ whose tractrix surface is an hyperboloid or a cone, according as Φ is not or is equal to zero.

When the values (54) and (55) are substituted in (22), the result is reducible to

$$(58) \quad \xi = \xi_0 + \frac{W \sin \sigma}{2} \frac{A+B}{C} (X_1 \sin \theta - X_2 \cos \theta),$$

where

$$(59) \quad \xi_0 = WX + \frac{X_1}{2 \sin \omega} \left(\frac{A}{C} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{B}{C} \frac{\partial W}{\partial v} \right) + \frac{X_2}{2 \cos \omega} \left(\frac{A}{C} \frac{\partial W}{\partial u} - \frac{B}{C} \frac{\partial W}{\partial v} \right).$$

In consequence of (15) and (56) equation (38) may be given the form

$$W = \left(\frac{A}{C} \cos^2 \frac{\sigma}{2} + \frac{B}{C} \sin^2 \frac{\sigma}{2} \right) W_1 + \frac{\sin \sigma}{\sin 2\theta} \left[\frac{A}{C} \sin(\theta - \omega) \frac{\partial W_1}{\partial u} - \frac{B}{C} \sin(\theta + \omega) \frac{\partial W_1}{\partial v} \right].$$

Hence the transform V_1 also is a surface of Voss for which its coordinate W_1 satisfies (28) when ω is replaced by θ , a result easily verified.

From (59) and (32) it follows that

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = W^2 + \frac{AB}{C^2} (W^2 - \Phi).$$

7. *When the tractrix is a quadric of revolution. Special surfaces of GUICHARD.* — Since the parametric curves on a surface V_b for which W satisfies (28) are geodesics, the tangents to the curves of either family form a normal congruence. We consider the surfaces orthogonal to such congruences. They are special surfaces of GUICHARD.

We take first the tangents to the curves $u = \text{const.}$ From (6) it follows that the direction-cosines of these tangents are of the form

$$(60) \quad \bar{X} = \cos \omega X_1 - \sin \omega X_2.$$

By differentiation we get

$$(61) \quad \frac{\partial \bar{X}}{\partial u} = -2 \frac{\partial \omega}{\partial u} (\sin \omega X_1 + \cos \omega X_2), \quad \frac{\partial \bar{X}}{\partial v} = \sin 2\omega X,$$

so that the coefficients of the spherical representation of the congruence are given by

$$(62) \quad \sqrt{E} = -2 \frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad \sqrt{G} = \sin 2\omega.$$

From these it follows that the direction-cosines of the tangents to the lines of curvature on a normal surface Σ , which in fact are the parametric lines, are of the form

$$(63) \quad \bar{X}_1 = \sin \omega X_1 + \cos \omega X_2, \quad \bar{X}_2 = X.$$

The cartesian coordinates \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} , of Σ are given by equations of the form

$$(64) \quad \bar{x} = x + t \bar{X},$$

where t is determined by the conditions

$$\sum \bar{X} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0, \quad \sum \bar{X} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0.$$

In consequence of (6) these equations of condition are reducible to

$$\frac{\partial t}{\partial u} = D \cot 2\omega, \quad \frac{\partial t}{\partial v} = -D'' \cos \epsilon \cot 2\omega.$$

When the values of D and D'' as given by (30) are substituted in these equations, in consequence of (28) their integral, to within an additive constant, is

$$(65) \quad t = \left(1 + \frac{B}{A}\right) \frac{1}{\sin 2\omega} \frac{\partial W}{\partial v},$$

and equation (64) reduces because of (5) to

$$(66) \quad \begin{cases} \bar{x} = W X + \frac{1}{\sin 2\omega} \frac{\partial W}{\partial u} (X_1 \cos \omega + X_2 \sin \omega) \\ \quad + \frac{B}{A} \frac{1}{\sin 2\omega} \frac{\partial W}{\partial v} (X_1 \cos \omega - X_2 \sin \omega). \end{cases}$$

From (60), (63) and (66) we get

$$(67) \quad \begin{cases} \bar{W} = \cot 2\omega \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{B}{A} \frac{1}{\sin 2\omega} \frac{\partial W}{\partial v}, \\ \bar{W}_1 = \frac{\partial W}{\partial u}, \quad \bar{W}_2 = W. \end{cases}$$

Since W satisfies (32) and (41), we must have

$$(68) \quad \bar{W}^2 + \bar{W}_1^2 - \frac{B}{A} \bar{W}_2^2 = \frac{b^2}{A^2}.$$

We have seen that each solution of equations (28) determines a function θ which satisfies (10). For this value of θ we have (40), by means of which the above expressions are reducible to

$$(69) \quad \begin{cases} \bar{W} = - \left(\cot \frac{\sigma}{2} \sin(\theta + \omega) W + \cos(\theta + \omega) \frac{b}{A} \right), \\ \bar{W}_1 = \cot \frac{\sigma}{2} \cos(\theta + \omega) W - \sin(\theta + \omega) \frac{b}{A}, \quad \bar{W}_2 = W, \end{cases}$$

and equation (66) may be written

$$(70) \quad \bar{x} = W X - \cot \frac{\sigma}{2} W (\sin \theta X_1 - \cos \theta X_2) - \frac{b}{A} (\cos \theta X_1 + \sin \theta X_2).$$

In like manner we consider the tangents to the curves $v = \text{const.}$ on V_b . The analogous functions are

$$(71) \quad \begin{cases} \bar{X} = \cos \omega X_1 + \sin \omega X_2, & \bar{X}_1 = X, & \bar{X}_2 = \sin \omega X_1 - \cos \omega X_2, \\ \sqrt{E} = -\sin 2\omega, & \sqrt{G} = -2 \frac{\partial \omega}{\partial v}. \end{cases}$$

We have also

$$t = - \left(1 + \frac{A}{B} \right) \frac{1}{\sin 2\omega} \frac{\partial W}{\partial u},$$

and the coordinates of Σ are of the form

$$(72) \quad \begin{cases} \bar{x} = WX - \frac{A}{B} \frac{1}{\sin 2\omega} \frac{\partial W}{\partial u} (\cos \omega X_1 + \sin \omega X_2) - \\ \quad - \frac{1}{\sin 2\omega} \frac{\partial W}{\partial v} (\cos \omega X_1 - \sin \omega X_2), \end{cases}$$

so that

$$(73) \quad \bar{W}_1 = W, \quad \bar{W}_2 = -\frac{\partial W}{\partial v}, \quad \bar{W} = -\frac{A}{B} \frac{1}{\sin 2\omega} \frac{\partial W}{\partial u} - \cot 2\omega \frac{\partial W}{\partial v}.$$

These satisfy

$$(74) \quad \bar{W}^2 + \bar{W}_2^2 - \frac{A}{B} \bar{W}_1^2 = \frac{h^2}{B^2}.$$

In terms of θ they are

$$\bar{W} = \tan \frac{\sigma}{2} \sin(\theta - \omega) W - \cos(\theta - \omega) \frac{h}{B},$$

$$\bar{W}_1 = W, \quad \bar{W}_2 = \tan \frac{\sigma}{2} \cos(\theta - \omega) W + \sin(\theta - \omega) \frac{h}{B}.$$

Hence we have

THEOREM 6. — *The tangents to the conjugate geodesics on a surface V_b constitute congruences normal to surfaces with tractrix surfaces which are central quadrics of revolution or cones of revolution, according as h differs from or is equal to zero.*

8. General class of surfaces Σ . — The surfaces Σ discussed in §§ 3, 4, 6 have in common the properties that their normals are parallel to the lines of a pseudospherical congruence with the developables of the normal congruence corresponding to the asymptotic lines on the focal surfaces of the pseudospherical congruence and that the planes through the normals parallel to the tangent planes to these focal surfaces envelope surfaces of Voss. We shall show that the second property is possessed by all surfaces whose normals satisfy the first condition.

Suppose we have a normal congruence whose direction-cosines are given by (11), and with the expressions (20) for the coefficients of the spherical representation of the developables of the congruences. The fundamental functions \bar{D} and \bar{D}' of a surface orthogonal to this congruence satisfy the CODAZZI equations

$$(75) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\bar{D}}{\sqrt{E}} \right) = \frac{\bar{D}'}{G} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\bar{D}'}{\sqrt{G}} \right) = \frac{\bar{D}}{E} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}.$$

When \bar{D} and \bar{D}'' are known, the cartesian coordinates of the surface are given by the quadratures

$$(76) \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = -\frac{\bar{D}}{E} \frac{\partial \bar{X}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -\frac{\bar{D}}{G} \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}.$$

Through the normals we draw planes parallel to the tangent planes to P and P_1 . The tangential coordinates W and W_1 of the envelopes of these planes are given by

$$W = \sum \bar{x} X, \quad W_1 = \sum \bar{x} X'.$$

With the aid of (75) and (76) we find that W satisfies (4) and W_1 equations (15). Hence we have

THEOREM 7. — *If \bar{S} is a surface whose normals are parallel to the lines of a pseudospherical congruence with the asymptotic lines on the focal surfaces P and P_1 of the congruence corresponding to the lines of curvature on \bar{S} , the planes through the normals parallel to the tangent planes to P and P_1 envelope two surfaces of Voss in the relation of a transformation Ω .*

BIANCHI ⁷⁾ has shown that when any surface has a tractrix surface defined by any one of equations (34), (35), (52), in which A and B have the same signs, the normals are parallel to the lines of a pseudospherical congruence with the correspondence referred to in THEOREM 7. From the preceding results it follows that all surfaces of this type may be obtained as in §§ 3, 4, 6.

BIANCHI considers also the case where A and B have different signs, and shows that the normals to such a surface are parallel to the lines of a real pseudospherical congruence of one of three types, for all of which the focal surfaces are imaginary. Since the associated surfaces of Voss also are imaginary, there is no advantage in studying this case from our point of view.

In § 7 we found a class of surfaces whose tractrix surfaces are quadrics of revolution with equations of the forms (68) and (74). Evidently the normals to these surfaces are parallel to the tangents to the asymptotic lines on the surface P with the representation (1), and these lines correspond to the lines of curvature on Σ . BIANCHI has shown that all surfaces with this type of tractrix surface possess these properties. Accordingly we have.

THEOREM 8. *Surfaces with tractrix surfaces defined by (34), (35), (52), (68), or (74), when A and B have the same signs may be obtained by the processes of the preceding sections.*

9. Certain properties of transformations of RIBAUCCOUR. — When in the correspondence established on the two sheets of the envelope of a two-parameter family of spheres by the points of contact on the same sphere the lines of curvature on the sheets correspond, these surfaces are said to be in the relation of a transformation of

⁷⁾ l. c. ¹⁾.

RIBAUCCOUR with one another. For brevity we say that either is obtained from the other by a *transformation* R . In this section we derive certain properties of these transformations.

The coordinates ξ, η, ζ of any surface whatever Σ referred to its lines of curvature can be put in the form (22), the functions X, X_1, X_2 satisfying (19) and (25), and the functions $\bar{W}, \bar{W}_1, \bar{W}_2$, equations (24) and (26).

Any other surface Σ' with the same spherical representation of its lines of curvature as Σ is defined by equations of the form

$$(77) \quad \xi' = \bar{W}' \bar{X} + \bar{W}'_1 \bar{X}_1 + \bar{W}'_2 \bar{X}_2,$$

where $\bar{W}', \bar{W}'_1, \bar{W}'_2$ satisfy (24) and (26).

As DARBOUX has shown⁸), the function \bar{W} determines a transformation R of Σ' . In fact, if E' and G' denote the first fundamental coefficients of Σ' , and λ is the function defined by

$$(78) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \bar{W}_1 \sqrt{E'}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \bar{W}_2 \sqrt{G'},$$

the sphere of radius λ/\bar{W} and center at the point whose coordinates are

$$(79) \quad x_0 = \xi' - \frac{\lambda}{\bar{W}} \bar{X}, \quad y_0 = \eta' - \frac{\lambda}{\bar{W}} \bar{Y}, \quad z_0 = \zeta' - \frac{\lambda}{\bar{W}} \bar{Z},$$

touches Σ' , and on the other sheet of the envelope, say Σ'_1 , the lines of curvature correspond to the lines of curvature on Σ' . Moreover, the cartesian coordinates of Σ'_1 are given by equations of the form

$$(80) \quad \xi'_1 = \xi' - \frac{1}{m\tau} \xi,$$

where m is a constant and the function τ is defined by

$$(81) \quad \bar{W}_1^2 + \bar{W}_2^2 + \bar{W}^2 = 2m\lambda\tau.$$

Furthermore, the direction-cosines $(\bar{X})_1, (\bar{Y})_1, (\bar{Z})_1; (\bar{X}_1)_1, (\bar{Y}_1)_1, (\bar{Z}_1)_1; (\bar{X}_2)_1, (\bar{Y}_2)_1, (\bar{Z}_2)_1$; of the normal, and the tangents to the lines of curvature on Σ'_1 are given by

$$(82) \quad (\bar{X})_1 = \bar{X} - \frac{\bar{W}\xi}{m\lambda\tau}, \quad (\bar{X}_1)_1 = \bar{X}_1 - \frac{\bar{W}_1\xi}{m\lambda\tau}, \quad (\bar{X}_2)_1 = \bar{X}_2 - \frac{\bar{W}_2\xi}{m\lambda\tau}.$$

From (80) and (82) we obtain

$$(83) \quad \begin{cases} (\bar{W}')_1 = \sum \xi'_1 (\bar{X})_1 = \bar{W}' + \frac{\bar{W}}{m\tau} \left(1 - \frac{T}{\lambda}\right), \\ (\bar{W}'_1)_1 = \sum \xi'_1 (\bar{X}_1)_1 = \bar{W}'_1 + \frac{\bar{W}_1}{m\tau} \left(1 - \frac{T}{\lambda}\right), \\ (\bar{W}'_2)_1 = \sum \xi'_1 (\bar{X}_2)_1 = \bar{W}'_2 + \frac{\bar{W}_2}{m\tau} \left(1 - \frac{T}{\lambda}\right), \end{cases}$$

⁸) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, II^e partie (Paris, Gauthier-Villars, 1889), p. 383. For a full treatment of these transformations see the author's paper: *Deformable Transformations of RIBAUCCOUR* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. XVII (1916), pp. 437-458]; from the first section of which we obtain the equations used in the present paper.

where

$$(84) \quad T = \overline{W} \overline{W}' + \overline{W}_1 \overline{W}'_1 + \overline{W}_2 \overline{W}'_2 = \xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta'.$$

We consider now the case where Σ is transformed by means of the function \overline{W} appearing in the equations (22) of the surface itself. Now equations (78) are reducible to the form

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \sum \xi \overline{X}_i \sqrt{E} = \sum \xi \frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \sum \xi \frac{\partial \xi}{\partial v},$$

and consequently to within an additive constant we have

$$2\lambda = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

From this result it follows that the spheres with centers at the points (79) pass through the origin.

Comparing this equation with (81), we see that $m\tau = 1$, and consequently equations (80) show that the origin is the transform of Σ .

Although, as we have just seen, the transformation R gives nothing of value in this case, the transformation by reciprocal radii does. In fact, the point coordinates ξ_0, η_0, ζ_0 , of the transform of Σ by reciprocal radii are given by

$$(85) \quad \xi_0 = \xi/\rho, \quad \eta_0 = \eta/\rho, \quad \zeta_0 = \zeta/\rho,$$

where

$$(86) \quad \rho = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2m\lambda\tau.$$

Now

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 2 \sum \xi \overline{X}_i \sqrt{E} = 2 \overline{W}_1 \sqrt{E}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial v} = 2 \overline{W}_2 \sqrt{G},$$

hence

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}}{\rho} \left(\overline{X}_1 - \frac{2 \overline{W}_1}{\rho} \right), \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{\rho} \left(\overline{X}_2 - \frac{2 \overline{W}_2}{\rho} \right).$$

From these expressions and (82) it follows that the transform Σ_0 has the same spherical representation of its lines of curvature as Σ'_1 . Hence we have

$$(87) \quad (\overline{W})_0 = \sum (\overline{X})_i \xi_0 = -\frac{\overline{W}}{\rho}, \quad (\overline{W}_1)_0 = -\frac{\overline{W}_1}{\rho}, \quad (\overline{W}_2)_0 = -\frac{\overline{W}_2}{\rho}.$$

10. Transformations of the surfaces Σ .—In § 6 we saw that if we have a special surface V_0 , that is a surface of Voss determined by a solution of (28) such that $\Phi = 0$, each constant σ not satisfying (29) and a solution θ of (10) determine the normals to a surface Σ for which the tractrix surface has the equation

$$(88) \quad A \overline{W}_1^2 - B \overline{W}_2^2 + C \overline{W}^2 = 0.$$

Again the tangents to the parametric curves on V_0 are normal to surfaces Σ whose tractrix surfaces have one of the equations

$$(89) \quad \overline{W}^2 + \overline{W}_1^2 - \frac{B}{A} \overline{W}_2^2 = 0, \quad \overline{W}^2 + \overline{W}_2^2 - \frac{A}{B} \overline{W}_1^2 = 0.$$

Hence from (87) we have

THEOREM 9. — *Surfaces Σ with the tractrix surfaces (88) or (89) are transformed into surfaces of the same kind by reciprocal radii.*

If V'_0 is another special surface of Voss with the same equations (28) as V_0 , the quantities σ and θ referred to above determine the normals to a surface Σ' with the same spherical representation of its lines of curvature as Σ and its tractrix surface has the same equation (88). We apply to this surface Σ' the transformation R determined by the function \bar{W} of the surface Σ . From (83) we have

$$(90) \quad A(\bar{W}'_1)_i^2 - B(\bar{W}'_2)_i^2 + C(\bar{W}')_i^2 = \frac{2}{m\lambda\tau}(\lambda - T)(A\bar{W}_1\bar{W}'_1 - B\bar{W}_2\bar{W}'_2 + C\bar{W}\bar{W}').$$

From (54) and (55) we get

$$(91) \quad A\bar{W}_1\bar{W}'_1 - B\bar{W}_2\bar{W}'_2 + C\bar{W}\bar{W}' = -\frac{AB}{C}\Psi,$$

where Ψ defined by (46) is a constant. Since W and W' belong to special surfaces V_0 , they are defined by equations of the form (47), and, as shown by (48), $\Psi \neq 0$.

We inquire whether the other factor in the right-hand member of (90) can be constant, say a . This necessitates

$$a \sum \xi^2 + \sum \xi\xi' - \lambda = 0.$$

Differentiating this equation, we find that this condition is satisfied only in case

$$\frac{\bar{W}'_1}{\bar{W}_1} = \frac{\bar{W}'_2}{\bar{W}_2} = \frac{\bar{W}'}{\bar{W}} = -2a,$$

that is, when Σ and Σ' are homothetic with respect to the origin.

Suppose we have a surface V_b , as defined in § 4, with the spherical representation (1) of its geodesic conjugate system. The quantities θ and σ referred to above determine in the tangent planes to V_b lines forming a congruence of normals to a surface Σ' , whose tractrix has the equation

$$(92) \quad A\bar{W}'^{12} - B\bar{W}'^{22} + C\bar{W}'^2 = \frac{b^2}{C}.$$

As thus defined Σ' and Σ (defined above) have the same spherical representation of their lines of curvature.

We apply to Σ' the transformation R determined by \bar{W} of the surface Σ . From (83) it follows that we have

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\bar{W}'_1)_i^2 - B(\bar{W}'_2)_i^2 + C(\bar{W}')_i^2 \\ = \frac{b^2}{C} + \frac{2}{m\lambda\tau}(\lambda - T)(A\bar{W}_1\bar{W}'_1 - B\bar{W}_2\bar{W}'_2 + C\bar{W}\bar{W}'). \end{array} \right.$$

Comparing the right-hand member of this equation with (91), we see that the necessary and sufficient condition that the transform Σ'_i be a surface of the same type as Σ' is that $\Psi(W, W') = 0$.

We turn to the consideration of surfaces of GUICHARD Σ and Σ' with tractrix surfaces given by the first of (89) and (68) respectively. We apply to Σ' the transformation R determined by \bar{W} of Σ . In consequence of (83) we obtain

$$(\bar{W}')_1 + (\bar{W}'_1)^2 - \frac{B}{A} (\bar{W}'_2)^2 = \frac{b^2}{A^2} + \frac{2}{m\lambda\tau} (\lambda - T) (\bar{W}\bar{W}' + \bar{W}_1\bar{W}'_1 - \frac{B}{A} \bar{W}_2\bar{W}'_2).$$

Substituting the values (67) and similar ones for Σ' in the left-hand member of the following equation, we get the other member:

$$\bar{W}\bar{W}' + \bar{W}_1\bar{W}'_1 - \frac{B}{A} \bar{W}_2\bar{W}'_2 = -\frac{B}{A} \Psi.$$

Hence as in the above case the determination of this type of transformations R of special surfaces of GUICHARD into surfaces of the same kind reduces to finding functions W' such that $\Psi(W, W') = 0$. We proceed to the investigation of this question.

In § 5 it was shown that W' is expressible in the form

$$W' = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3,$$

where the functions w_i^1 are defined by equations of the form (47). If a_{ij} denotes the value of Ψ for the functions w_i and w_j , then for W' we have

$$\Phi(\bar{W}') = 2(a_{12}a_1a_2 + a_{23}a_2a_3 + a_{13}a_1a_3) \neq 0.$$

In like manner

$$W = a_{01}w_1 + a_{02}w_2 + a_{03}w_3,$$

where the constants a_{01}, a_{02}, a_{03} , are such that

$$\Phi(W) = 2(a_{01}a_{02}a_{12} + a_{02}a_{03}a_{23} + a_{01}a_{03}a_{13}) = 0.$$

If the constants a_1, a_2, a_3 , are chosen so that

$$a_{12}(a_1a_{02} + a_2a_{01}) + a_{23}(a_2a_{03} + a_3a_{02}) + a_{13}(a_1a_{03} + a_3a_{01}) = 0,$$

then for W and W' we have $\Psi = 0$.

Applying these results to the previous considerations, we have

THEOREM 10. — *If Σ is a surface with a tractrix surface (88) or (89), there exist ∞^2 surfaces Σ' with tractrix surfaces of the type (92) or (68) which in the transformations determined by the function W of Σ go into surfaces of the same kind as Σ' .*

Conversely it follows from the above that if W' is a function for which $\Phi \neq 0$, we can find ∞^1 functions W for which $\Psi(W, W') = 0$. Hence we have.

THEOREM 11. — *If Σ' is a surface with a tractrix of the type (92) or (68), there exist ∞^1 of the above transformations R of Σ' into surfaces of the same kind, and these can be found directly.*

II. Induced transformations of the surfaces V_h . — Now we consider the transformation of surfaces of Voss induced by the transformations R discussed in the preceding section.

In consequence of (12) the expressions (18) can be given the equivalent forms

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 &= \cos \frac{\sigma}{2} (\sin \omega X_1 - \cos \omega X'_2) + \sin \frac{\sigma}{2} X', \\ \bar{X}_2 &= \sin \frac{\sigma}{2} (\sin \omega X'_1 - \cos \omega X'_2) - \cos \frac{\sigma}{2} X'.\end{aligned}$$

From these equations and (18) we find

$$\begin{aligned}X &= - \left(\sin \frac{\sigma}{2} \bar{X}_1 + \cos \frac{\sigma}{2} \bar{X}_2 \right), \\ X' &= \sin \frac{\sigma}{2} \bar{X}_1 - \cos \frac{\sigma}{2} \bar{X}_2.\end{aligned}$$

Hence for a surface Σ' with a tractrix of the type (92) the planes through the normals to Σ' which make the angles $\pi - \sigma/2$ and $\pi + \sigma/2$ with the planes whose direction-cosines are \bar{X}_2 , \bar{Y}_2 , \bar{Z}_2 , envelope two surfaces of Voss in the relation of a transformation Ω .

For the surfaces Σ'_i resulting from Σ' by the transformations R discussed in the preceding section the constant σ is the same as for Σ' . Accordingly the planes through the normals to Σ'_i which make the angle $\pi - \sigma/2$ with the planes whose direction-cosines are $(\bar{X}_2)_i$, $(\bar{Y}_2)_i$, $(\bar{Z}_2)_i$ envelope a surface of Voss V_b . The tangential coordinates of this surface are expressible in the form

$$\begin{aligned}(X)_i &= - [\sin \sigma/2 (\bar{X}_1)_i + \cos \sigma/2 (\bar{X}_2)_i], \\ (W')_i &= - [\sin \sigma/2 (\bar{W}'_1)_i + \cos \sigma/2 (\bar{W}'_2)_i],\end{aligned}$$

which in consequence of (82) and (83) are reducible to

$$(94) \quad \begin{cases} (X)_i = X - \frac{W}{m \lambda \tau} \xi, \\ (W')_i = W' - \frac{W}{m \lambda \tau} (\lambda - T). \end{cases}$$

Corresponding to the case of the transformation of Σ by reciprocal radii the expressions for $(X)_i$, $(Y)_i$, $(Z)_i$ are the same as (94) and

$$(95) \quad (W)_i = - \frac{W}{\rho}.$$

This surface is a special surface of Voss V_o and consequently we have thus established a new transformation of these surfaces.

We consider also the transformations of surfaces of Voss induced by the above transformations R of special surfaces of GUICHARD. If Σ'_i is the transform of Σ' , it follows from the investigation that the principal planes of Σ'_i corresponding to those of Σ' envelope surfaces of Voss V_b .

Applying formulas (82) and (83) to the respective results (63), (66) and (71),

(72), we get the following expressions for the tangential coordinates of the transforms of V_b :

$$(96) \quad \begin{cases} (X)_2 = X - \frac{W\bar{x}_2}{m\lambda_2\tau_2}, & (W')_2 = W' + \frac{W}{m\lambda_2\tau_2}(\lambda_2 - T), \\ (X)_1 = X - \frac{W\bar{x}_1}{m\lambda_1\tau_1}, & (W')_1 = W' + \frac{W}{m\lambda_1\tau_1}(\lambda_1 - T), \end{cases}$$

where \bar{x}_2 and \bar{x}_1 are given by (66) and (72) respectively, and the functions λ_i are determined by quadratures of the form (78). Moreover, from (81) and (68) we get

$$2m\lambda_i\tau_i = W^2 \left(1 + \frac{B}{A} \right) + \frac{b^2}{A^2},$$

When a surface Σ with either of the tractrix surfaces (89) is subjected to a transformation by reciprocal radii, the expressions for the direction-cosines are the same as above, but the W 's have the values

$$(W)_2 = -\frac{W}{\rho}, \quad (W)_1 = -\frac{W}{\rho},$$

where now

$$\rho = 2m\lambda\tau = W^2 \left(1 + \frac{B}{A} \right).$$

Hence in this case corresponding tangent planes to the two transforms are equidistant from the origin.

12. Special surfaces of GUICHARD, and congruences of GUICHARD.—From (66) we obtain by differentiation

$$(97) \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left(1 + \frac{B}{A} \right) W \bar{X}_1, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \left(1 + \frac{B}{A} \right) \frac{\partial W}{\partial v} \bar{X}_2.$$

Hence the first fundamental coefficients \bar{E} and \bar{G} of Σ are of the form

$$(98) \quad \sqrt{\bar{E}} = \left(1 + \frac{B}{A} \right) W, \quad \sqrt{\bar{G}} = \left(1 + \frac{B}{A} \right) \frac{\partial W}{\partial v}.$$

The tangents to the curves $u = \text{const.}$ on Σ form a congruence of GUICHARD by definition provided that the parametric curves on the second focal surface Σ_1 of the congruence are lines of curvature. If $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$ denote the cartesian coordinates of this focal surface, their expressions are of the form

$$(99) \quad \bar{x}_1 = \bar{x} - \sqrt{\bar{E}} X,$$

since by differentiation we find

$$(100) \quad \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial u} = -\frac{\partial \sqrt{\bar{E}}}{\partial u} X, \quad \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial v} = \sqrt{\bar{E}} (-\sin \omega X_1 + \cos \omega X_2).$$

From these expressions it follows at once that the parametric curves on this surface are orthogonal and consequently the lines form a congruence of GUICHARD.

If $(\bar{X}_1)_1, \dots; (\bar{X}_2)_1, \dots; (\bar{X})_1, \dots$, denote respectively the direction-cosines of the tangents to the curves $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, and of the normals to Σ_1 we

have from (100)

$$\begin{aligned}(\bar{X}_1)_1 &= X, \quad (\bar{X}_2)_1 = \sin \omega X_1 - \cos \omega X_2, \\(\bar{X}) &= \cos \omega X_1 + \sin \omega X_2.\end{aligned}$$

Moreover, from these expressions and (99) we obtain

$$\begin{aligned}(\bar{W})_1 &= \frac{1}{\sin 2\omega} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{B}{A} \cot 2\omega \frac{\partial W}{\partial v}, \\(\bar{W}_1)_1 &= -\frac{B}{A} W, \quad (\bar{W}_2)_1 = \frac{B}{A} \frac{\partial W}{\partial v}.\end{aligned}$$

In consequence of (32) and (41) we see that these functions are in the relation

$$(\bar{W})_1^2 + (\bar{W}_2)_1^2 - \frac{A}{B} (\bar{W}_1)_1^2 = \frac{h_2}{B^2}.$$

Since similar results follow when Σ is given by (72), we have

THEOREM 12. — *When for a congruence of GUICHARD one of the focal surfaces has a tractrix surface (68), the other has a tractrix surface (74); and vice-versa.*

From the preceding results it follows that for the case just considered the special surface of VOSS associated with the new surface of GUICHARD has the tangential coordinates

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad -\frac{B}{A} W.$$

13. Other transformations R of surfaces Σ .

If S_0 denotes the surfaces whose rectangular coordinates ξ_0, η_0, ζ_0 , are given by (59), it follows that the distance between corresponding points on S_0 and Σ , whose coordinates are of the form (58), is $W \sin \sigma (A + B)/2C$. As this value is independent of θ , if we take two solutions of (10) for the same σ , we get two surfaces Σ and Σ_1 , with similar tractrix surfaces (52), in the relation of a transformation R .

Suppose now that we have a surface Σ of this type. As shown in § 11, we know how to draw planes through the normals to Σ to get a surface V_h . Making use of this result and of equations (11) and (18) we find the corresponding functions ω and θ . The constant σ is determined by (56). Since equations (10) are reducible to the RICCATI form, it follows that the further solution of these equations reduces to quadratures. Hence we have.

THEOREM 13. — *When a surface Σ with a tractrix of the form (52) is known, ∞^1 surfaces of the same type can be found by quadratures alone; each of these surfaces is in the relation of an transformation R with Σ .*

These transformations differ from those treated in § 10. For in the present case the planes determined by the corresponding radii of the spheres of the transformation envelope the surface of VOSS referred to above. That this is not true of the transformations of § 10 is evident from (82).

Princeton University, Novembre 6, 1916.

LUTHER PFAHLER EISENHART.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME FONDAMENTAL SUR LA DENSITÉ DES ENSEMBLES.

par **N. Lusin** (Moscou) et **W. Sierpinski** (Léopol).

Adunanza del 23 luglio 1916.

Le but de cette Note est de donner une démonstration élémentaire (c'est-à-dire n'utilisant pas la notion d'intégrale) au théorème suivant, qui est dû à M. H. LEBESGUE :

Tous les points d'un ensemble mesurable, sauf peut-être les points d'un sous-ensemble de mesure nulle, sont points de densité de cet ensemble.

Désignons par $E_{a,b}$ la portion de l'ensemble E contenue dans l'intervalle $I = (a, b)$ (c'est à dire le produit EI). On appelle un point x de l'ensemble E , *point de densité* de cet ensemble, si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m(E_{x-\varepsilon, x+\varepsilon})}{2\varepsilon} = 1$$

[par $m(P)$ nous désignons, comme d'usage, la mesure lebesgienne de l'ensemble P].

LEMME. — E étant un ensemble mesurable, I_1, I_2, \dots, I_n une suite finie des ensembles dont chacun est un intervalle, H désignant l'ensemble-somme $I_1 + I_2 + \dots + I_n$ et ρ étant un nombre positif ≤ 1 , les inégalités

$$(1) \quad m(EI_k) \leq \rho m(I_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

entraînent l'inégalité

$$(2) \quad m(EH) \leq \frac{1 + \rho}{2} m(H).$$

DÉMONSTRATION. L'ensemble $H = I_1 + I_2 + \dots + I_n$ se compose évidemment d'un nombre fini des intervalles D_1, D_2, \dots, D_p ($p \leq n$), sans point communs deux à deux. Il suffira évidemment de démontrer les inégalités

$$m(ED_k) \leq \frac{1 + \rho}{2} m(D_k), \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

dont la somme donne l'inégalité (2). Démontrons par ex. l'inégalité

$$(3) \quad m(ED_1) \leq \frac{1 + \rho}{2} m(D_1).$$

Soient I_1, I_2, \dots, I_m ceux des ensembles I_1, I_2, \dots, I_n qui appartiennent à l'intervalle D_1 . Désignons par a_1 l'extrémité gauche de l'intervalle D_1 : ce sera évidemment en même temps l'extrémité gauche de l'un au moins des intervalles I_1, I_2, \dots, I_m : s'il y en a plus, soit I_1 le plus long entre eux et soit b_1 son extrémité droite. Si b_1 n'est pas l'extrémité droite de l'intervalle D_1 , b_1 appartient à l'un au moins des intervalles I_2, I_3, \dots, I_m : s'il y en a plus, soit $I_2 = (a_2, b_2)$ celui d'entre eux, dont l'extrémité droite b_2 est au plus éloignée de b_1 .

Nous aurons évidemment: $a_1 < a_2 \leq b_1 < b_2$. Si b_2 n'est pas l'extrémité droite de D_1 , b_2 appartient à l'un au moins des intervalles I_3, I_4, \dots, I_m : soit $I_3 = (a_3, b_3)$ celui d'entre eux, pour lequel b_3 est au plus éloigné de b_2 . Nous aurons évidemment $a_3 \leq b_2 < b_3$.

Je dis que $b_1 < a_3$. En effet, s'il serait $a_3 \leq b_1$, il s'ensuirait, d'après $b_1 < b_2 < b_3$, que $I_3 = (a_3, b_3)$ est un intervalle contenant b_1 , dont l'extrémité droite b_3 est plus éloignée de b_1 que celle de l'intervalle I_2 , contre la définition de ce dernier. Si b_3 n'est pas l'extrémité droite de D_1 , nous pourrions raisonner sur b_3 comme nous l'avons sur b_2 et ainsi de suite, jusqu'à ce que pour un indice $s (\leq m)$ le point b_s coïncidera avec l'extrémité droite de l'intervalle D_1 .

Nous aurons:

$$a_1 < a_2 \leq b_1 < a_3 \leq b_2 < a_4 \leq b_3 < \dots < a_s \leq b_{s-1} < b_s,$$

et l'intervalle D_1 se décomposera en une somme des intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} D_1 = (a_1, b_s) &= (a_1, a_2) + (a_2, b_1) + (b_1, a_3) + (a_3, b_2) + \dots \\ &\dots + (a_s, b_{s-1}) + (b_{s-1}, b_s) \end{aligned} \right.$$

[les intervalles $(a_2, b_1), (a_3, b_2), \dots, (a_s, b_{s-1})$ pouvant se réduire aux points].

En désignant par $E_{a,b}$ la portion de l'ensemble E contenue dans l'intervalle (a, b) , nous aurons évidemment d'après (4):

$$EI_1 = E_{a_1, a_2} + E_{a_2, b_1}$$

$$EI_k = E_{a_k, b_{k-1}} + E_{b_{k-1}, a_{k+1}} + E_{a_{k+1}, b_k}, \quad (k = 2, 3, \dots, s-1)$$

$$EI_s = E_{a_s, b_{s-1}} + E_{b_{s-1}, b_s},$$

ce qui donne:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &m(EI_1) + m(EI_2) + \dots + m(EI_s) \\ &= m(E_{a_1, a_2}) + 2m(E_{a_2, b_1}) + m(E_{b_1, a_3}) + 2m(E_{a_3, b_2}) + m(E_{b_2, a_4}) + \dots \\ &\quad \dots + 2m(E_{a_s, b_{s-1}}) + m(E_{b_{s-1}, b_s}) \\ &= 2[m(E_{a_1, a_2}) + m(E_{a_2, b_1}) + m(E_{b_1, a_3}) + \dots + m(E_{b_{s-1}, b_s})] - \\ &\quad - [m(E_{a_1, a_2}) + m(E_{b_1, a_3}) + m(E_{b_2, a_4}) + \dots + m(E_{b_{s-1}, b_s})]. \end{aligned} \right.$$

Or, nous avons évidemment :

$$\begin{aligned} m(E_{a_1, a_2}) + m(E_{a_2, b_1}) + m(E_{b_1, a_3}) + \cdots + m(E_{b_{s-1}, b_s}) &= m(E_{a_1, b_s}) = m(ED_1), \\ m(E_{a_1, a_2}) + m(E_{b_1, a_3}) + m(E_{b_2, a_4}) + \cdots + m(E_{b_{s-1}, b_s}) \\ &\leq (a_2 - a_1) + (a_3 - b_1) + (a_4 - b_2) + \cdots + (b_s - b_{s-1}); \end{aligned}$$

d'autre part, d'après (5), ρ étant ≤ 1 :

$$\begin{aligned} m(EI_1) + m(EI_2) + \cdots + m(EI_s) &\leq \rho [m(I_1) + m(I_2) + \cdots + m(I_s)] \\ &= \rho [(a_2 - a_1) + 2(b_1 - a_2) + (a_3 - b_1) + 2(b_2 - a_3) + \cdots + (b_s - b_{s-1})] \\ &\leq \rho (b_s - a_1) + [(b_1 - a_2) + (b_2 - a_3) + \cdots + (b_{s-1} - a_s)]; \end{aligned}$$

nous trouvons donc, d'après (5) :

$$\begin{aligned} 2m(ED_1) &\leq \rho (b_s - a_1) + [(b_1 - a_2) + (b_2 - a_3) + \cdots + (b_{s-1} - a_s)] \\ &\quad + [(a_2 - a_1) + (a_3 - b_1) + (a_4 - b_2) + \cdots + (b_s - b_{s-1})] \\ &= \rho (b_s - a_1) + (b_s - a_1) = (\rho + 1)m(D_1), \end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité (3). Notre lemme est donc démontré.

COROLLAIRE. — E étant un ensemble mesurable, I_1, I_2, I_3, \dots une suite infinie des ensembles dont chacun est un intervalle, H désignant l'ensemble-somme $I_1 + I_2 + I_3 + \cdots$ et ρ un nombre positif ≤ 1 , les inégalités

$$(6) \quad m(EI_k) \leq \rho m(I_k) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

entraînent l'inégalité

$$(7) \quad m(EH) \leq \frac{1 + \rho}{2} m(H)$$

DÉMONSTRATION. — Posons $H_n = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$; EH_n sera évidemment sous-ensemble de EH_{n+1} , et EH sera l'ensemble-somme de tous les EH_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) : nous aurons donc, d'après un théorème bien connu de la théorie de mesure :

$$(8) \quad m(EH) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(EH_n)$$

Or, d'après (6) et d'après notre lemme, nous avons :

$$m(EH_n) \leq \frac{1 + \rho}{2} m(H_n), \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

donc, H_n étant sous-ensemble de H :

$$m(EH_n) \leq \frac{1 + \rho}{2} m(H), \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ce qui donne, d'après (8), l'inégalité (7).

Notre corollaire est donc démontré.

Soit maintenant E un ensemble mesurable donné. Il s'en suit sans peine de la définition du point de densité de l'ensemble E que si x n'est pas point de densité de

E , il existe un nombre naturel n et une suite infinie de nombres positifs, tendant vers zéro ε_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), telle que

$$(9) \quad \frac{m(E_{x-\varepsilon_k, x+\varepsilon_k})}{2\varepsilon_k} \leq 1 - \frac{1}{n}. \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Désignons par P l'ensemble de tous les points de l'ensemble E qui ne sont pas points de densité de E et par P_n l'ensembles de tous les points x de P pour lesquels il existe une suite infinie ε_k tendant vers 0 et satisfaisant à l'inégalité (9). Nous aurons évidemment

$$(10) \quad P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

Soit maintenant n un indice donné, x un point de l'ensemble P_n , et $\delta = (\alpha, \beta)$ un intervalle donné tel que

$$(11) \quad \alpha < x < \beta.$$

Je dis qu'il existe deux nombres rationnels a et b tels que

$$(12) \quad \alpha < a < x < b < \beta, \quad \text{et} \quad \frac{m(E_{a,b})}{b-a} \leq 1 - \frac{1}{2n}.$$

En effet, ε_k étant une suite positive, tendant vers 0, il existe, d'après (11), un indice k tel que

$$(13) \quad \varepsilon_k < x - \alpha \quad \text{et} \quad \varepsilon_k < \beta - x.$$

Soient a et b des nombres rationnels, satisfaisants aux inégalités:

$$(14) \quad x - \varepsilon_k < a < x - \frac{2n-2}{2n-1}\varepsilon_k, \quad x + \frac{2n-2}{2n-1}\varepsilon_k < b < x + \varepsilon_k;$$

l'intervalle (a, b) sera donc intérieur à l'intervalle $(x - \varepsilon_k, x + \varepsilon_k)$, ce qui entraîne, d'après (9), l'inégalité:

$$(15) \quad m(E_{a,b}) \leq m(E_{x-\varepsilon_k, x+\varepsilon_k}) \leq 2\varepsilon_k \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Or d'après (14):

$$b - a > 2\varepsilon_k \frac{2n-2}{2n-1},$$

donc, d'après (15):

$$\frac{m(E_{a,b})}{b-a} < 1 - \frac{1}{2n}.$$

Enfin, d'après (14) et (13) nous avons:

$$\text{donc:} \quad x > a > x - \varepsilon_k > \alpha \quad \text{et} \quad x < b < x + \varepsilon_k < \beta,$$

$$\alpha < a < x < b < \beta.$$

Les nombres rationnels a et b satisfont donc aux inégalités (12).

Démontrons maintenant que $m(P_n) = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Soit n un indice donné: posons $m_e(P_n) = \mu_n$.

Il s'en suit de la définition de la mesure extérieure d'un ensemble qu'il existe pour tout ε positif donné une suite infinie d'intervalles

$$(16) \quad \delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$$

telle que tout point de l'ensemble P_n est intérieur à l'un au moins d'eux et que

$$(17) \quad m(\delta_1) + m(\delta_2) + m(\delta_3) + \dots < \mu_n + \varepsilon.$$

Soit x un point de l'ensemble P_n : le point x est donc intérieur à l'un au moins des intervalles (16): soit $\delta_p = (\alpha, \beta)$ le premier d'entre eux: nous aurons donc $\alpha < x < \beta$.

Or, comme nous avons démontré, x appartenant à l'ensemble P_n et satisfaisant à l'inégalité (11), il existe un intervalle $I = (a, b)$ aux extrémités rationnelles, satisfaisant aux inégalités (12): nous aurons donc, d'après (12):

$$m(EI) \leq \left(1 - \frac{1}{2n}\right) m(I).$$

L'ensemble de tous les intervalles $I = (a, b)$ qui correspondent ainsi aux points x de l'ensemble P_n est dénombrable (puisque a et b sont des nombres rationnels): soit

$$(18) \quad I_1, I_2, I_3, \dots$$

cet ensemble. Nous aurons donc

$$(19) \quad m(EI_k) \leq \left(1 - \frac{1}{2n}\right) m(I_k). \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Tout point x de l'ensemble P_n sera donc intérieur à un (au moins) intervalle I_k , satisfaisant à l'inégalité (19). Désignons par H l'ensemble de tous les points qui appartiennent à l'un au moins des intervalles (18); d'après (19) et d'après le corollaire de notre lemme, nous aurons:

$$(20) \quad m(EH) \leq \left(1 - \frac{1}{4n}\right) m(H).$$

Or, tout intervalle I_k est intérieur à l'un au moins des intervalles (16): nous avons donc, d'après (17):

$$(21) \quad m(H) < \mu_n + \varepsilon.$$

D'autre part, P_n étant évidemment un sous-ensemble de EH , nous avons

$$\mu_n = m_e(P_n) \leq m_e(EH) = m(EH),$$

donc, d'après (20) et (21):

$$(22) \quad \mu_n < \left(1 - \frac{1}{4n}\right) (\mu_n + \varepsilon).$$

Le nombre positif ε étant arbitraire, l'inégalité (22) donne

$$\mu_n \leq \left(1 - \frac{1}{4n}\right) \mu_n,$$

cé qui (μ_n étant ≥ 0) peut avoir lieu seulement si $\mu_n = 0$. Nous avons donc

$$m_\varepsilon(P_n) = \mu_n = 0,$$

ce qui démontre que l'ensemble P_n est de mesure nulle.

Nous avons donc $m(P_n) = 0$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, et la formule (10) donne $m(P) = 0$. Le théorème est donc démontré.

Juin 1916.

N. LUSIN, W. SIERPIŃSKI.

NOZIONE DI PARALLELISMO IN UNA VARIETÀ QUALUNQUE E CONSEGUENTE SPECIFICAZIONE GEOMETRICA DELLA CURVATURA RIEMANNIANA.

Memoria di **T. Levi-Civita** (Padova).

Adunanza del 24 dicembre 1916.

INTRODUZIONE.

La teoria della gravitazione di EINSTEIN (suffragata oramai dalla spiegazione della famosa disuguaglianza secolare, che l'osservazione rivela nel perielio di Mercurio, e non è prevista dalla legge di NEWTON) considera la struttura geometrica dello spazio ambiente come tenuissimamente, ma pur intimamente, dipendente dai fenomeni fisici che vi si svolgono; a differenza delle teorie classiche, che assumono tutto lo spazio fisico quale dato a priori. Lo svolgimento matematico della grandiosa concezione di EINSTEIN (che trova nel calcolo differenziale assoluto del RICCI il suo naturale strumento algoritmico) fa intervenire come elemento essenziale la curvatura di una certa varietà a quattro dimensioni e i relativi simboli di RIEMANN. L'incontro, anzi il maneggio continuativo di tali simboli in questioni di così alto interesse generale mi ha condotto a ricercare se non sia possibile ridurre alquanto l'apparato formale che serve abitualmente ad introdurli e a stabilirne il comportamento covariante ¹⁾.

Un perfezionamento in proposito è effettivamente possibile, e costituisce in sostanza i §§ 15 e 16 del presente scritto; il quale, sorto inizialmente con questo solo obbiettivo, venne via via ampliandosi per far debito posto anche all'interpretazione geometrica.

In sulle prime avevo creduto di trovarla senz'altro nei lavori originali di RIEMANN « *Über die Hypothesen welche Geometrie zu Grunde liegen* » e « *Commentatio mathematica ...* » ²⁾; ma ce n'è appena un embrione. Da un lato infatti, ravvicinando le fonti citate, si ricava l'impressione che RIEMANN avesse proprio in mente quella caratterizzazione della curvatura intrinseca e invariante, che sarà qui precisata (§§ 17-18).

¹⁾ Cfr. per es. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, Vol. I (Pisa, Spoerri, 1902), pp. 69-72.

²⁾ B. RIEMANN, *Gesammelte mathematische Werke* (Leipzig, Teubner, 1876), pp. 261-263, 381-382.

D'altra parte però non c'è traccia, nè in RIEMANN, nè nel commento esplicativo dovuto a WEBER ³⁾, di quelle specificazioni (nozione di direzioni parallele in una varietà qualunque e considerazione di un quadrangolo geodetico infinitesimo con due lati paralleli), che riconosceremo indispensabili dal punto di vista geometrico. Inoltre non si riesce — io almeno non sono riuscito — a giustificare il passaggio formale con cui, secondo RIEMANN, dalle premesse, che sono inappuntabili, si dovrebbe conseguire la altrettanto inappuntabile espressione finale della curvatura.

Presenterò al lettore questo mio dubbio, fornendogli i necessari elementi di giudizio, in una nota critica finale.

La prima e più estesa parte della memoria (§§ 1-14) è destinata a introdurre e ad illustrare la nozione di parallelismo in una V_n a metrica qualsiasi.

Si comincia dal campo infinitesimale, cercando di caratterizzare il parallelismo di due direzioni (α) , (α') uscenti da due punti vicinissimi P e P' . All'uopo si ricorda che qualunque varietà V_n si può riguardare immersa in uno spazio euclideo S_N a un numero abbastanza elevato N di dimensioni, e si rileva anzitutto che, immaginando spiccata da P una generica direzione (f) di S_N , il parallelismo ordinario in tale spazio richiederebbe

$$\text{angolo } \widehat{(f)(\alpha)} = \text{angolo } \widehat{(f)(\alpha')},$$

per qualunque (f) . Orbene, il parallelismo in V_n si definisce, limitandosi ad esigere che la condizione sia soddisfatta *per tutte le (f) appartenenti a V_n* (ossia alla giacitura di S_N tangente in P a V_n).

A giustificazione di questa definizione va notato che, mentre essa riproduce, come è necessario, il comportamento elementare per le V_n euclidee, ha in ogni caso carattere intrinseco, perchè in definitiva risulta dipendente soltanto dalla metrica di V_n , e non anche dall'ausiliario spazio ambiente S_N . Infatti la traduzione analitica della nostra definizione di parallelismo si concreta come segue: Riferita la V_n a coordinate generali x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), siano dx_i gli incrementi corrispondenti al passaggio da P a P' ; $\xi^{(i)}$ i parametri spettanti a una generica direzione (α) uscente da P ; $\xi^{(i)} + d\xi^{(i)}$ quelli spettanti ad una direzione infinitamente vicina (α') , spiccata da P' . La condizione di parallelismo è espressa dalle n equazioni

$$(A) \quad d\xi^{(i)} + \sum_{j,l}^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} dx_j \xi^{(l)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

designando $\left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\}$ i noti simboli di CHRISTOFFEL.

Una volta acquisita la legge con cui si passa da un punto a un punto infinitamente vicino, si è senz'altro in grado di eseguire il trasporto di direzioni parallele lungo una qualsiasi curva C . Se $x_i = x_i(s)$ ne costituiscono le equazioni parametriche,

³⁾ loc. cit. ²⁾, pp. 384-389.

basta evidentemente riguardare, nelle (A) , le x_i e subordinatamente le $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix} \right\}^l$ come funzioni assegnate, le $\xi^{(i)}$ come funzioni da determinarsi del parametro s , e si ha il sistema lineare ordinario

$$\frac{d\xi^{(i)}}{ds} + \sum_{j,l} \left\{ \begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix} \right\}^l \frac{dx_j}{ds} \xi^{(l)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

riducibile ad una forma tipica (detta a determinante gobbo), che già si è presentata in altre ricerche e fu oggetto di studio sistematico da parte dei sig.^{ri} EIESLAND ⁴⁾, LAURA ⁵⁾, DARBOUX ⁶⁾, VESSIOT ⁷⁾.

Ecco qualche conseguenza geometrica.

1° La direzione parallela in un punto generico P ad una direzione (α) uscente da un altro punto qualsiasi P_0 dipende in generale dal cammino secondo cui si passa da P_0 a P . L'indipendenza dal cammino è proprietà esclusiva delle varietà euclidee.

2° Lungo una medesima geodetica, le direzioni delle tangenti sono parallele, ciò che generalizza un'ovvia caratteristica della retta negli spazi euclidei (quella appunto che EUCLIDE pone in testa agli elementi come intuizione primordiale della retta).

3° Il trasporto per parallelismo, lungo un cammino qualsiasi, di due direzioni concorrenti ne conserva l'angolo. Con ciò si vuol dire evidentemente che l'angolo formato da due generiche direzioni uscenti da un medesimo punto è anche l'angolo formato dalle loro parallele in un altro punto qualunque. Tenendo conto della rilevata proprietà delle geodetiche, si ricava il corollario che, lungo una geodetica, direzioni parallele sono sempre egualmente inclinate sulla geodetica stessa. Se si tratta in particolare di una V_2 , questa condizione è anche sufficiente; sicchè, per le ordinarie superficie, parallelismo lungo una geodetica equivale ad isogonalità.

Non ho indicato con ordine il contenuto dei vari §§. Supplirà agevolmente uno sguardo al sommario riportato alla fine del lavoro.

§ 1.

Preliminari.

Sia (coi soliti simboli)

$$ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k$$

⁴⁾ J. EIESLAND, *On the Integration of a System of Differential Equations in Kinematics* [American Journal of Mathematics, vol. XXVIII (1906), pp. 17-42].

⁵⁾ E. LAURA, *Sulla integrazione di un sistema di quattro equazioni differenziali lineari a determinante gobbo per mezzo di due equazioni di RICCATI* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLII (1906-1907), pp. 1089-1108; vol. XLIII (1907-1908), pp. 358-378].

⁶⁾ G. DARBOUX, *Sur certains systèmes d'équations linéaires* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXLVIII (1^{er} semestre 1909), pp. 16-22], e *Sur les systèmes d'équations différentielles homogènes* (Ibid., pp. 673-679 e pp. 745-754).

⁷⁾ E. VESSIOT, *Sur l'intégration des systèmes linéaires à déterminant gauche* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXLVIII (1^{er} semestre 1909), pp. 332-335].

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare di una varietà qualsiasi V_n .

Come è ben noto, si può sempre riguardare la V_n immersa in uno spazio euclideo S_N a un numero di dimensioni N abbastanza grande (non superiore a $\frac{n(n+1)}{2}$).

Indichino y_v ($v = 1, 2, \dots, N$) coordinate cartesiane di un tale spazio. In seno ad esso, gioverà considerare la V_n definita mediante le espressioni parametriche

$$(1) \quad y_v = y_v(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (v = 1, 2, \dots, N)$$

delle coordinate cartesiane in termini delle intrinseche, risultando in conformità

$$(2) \quad ds^2 = \sum_v^N dy_v^2 = \sum_{ik}^n a_{ik} dx_i dx_k.$$

Assumiamo in V_n una curva C a piacimento, e siano

$$(3) \quad x_i = x_i(s) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

le sue equazioni parametriche, s designando l'arco (contato a partire da un'origine arbitraria). La C appartiene naturalmente anche allo spazio ambiente S_N , e come tale rimane definita dalle espressioni parametriche $y_v(s)$ delle coordinate cartesiane dei suoi punti. Queste espressioni parametriche sono senz'altro offerte dalle (1), in cui si attribuiscono alle x_i i valori (3). Derivandole rapporto ad s , e indicando con apici le derivate rapporto a questo argomento, si ha

$$(4) \quad y'_v = \sum_i^n \frac{\partial y_v}{\partial x_i} x'_i \quad (v = 1, 2, \dots, N).$$

Riferiamoci ad un valore generico, ma ben determinato, di s , cioè ad un qualsiasi punto P della curva C . Le y'_v costituiscono manifestamente i coseni direttori di C in P rispetto agli assi coordinati dello spazio euclideo S_N ; le x'_i sono i *parametri di direzione* (della stessa C e nello stesso punto P) rispetto a V_n .

Ricordiamo ancora ⁸⁾ che, se si pone

$$(5) \quad y''_v = c q_v,$$

con $c \geq 0$ e $\sum_v^N q_v^2 = 1$, rimane definita la curvatura c di C in P , e (escluso il caso limite $c = 0$), pel tramite dei coseni q_v , una direzione (q) , detta *normale principale assoluta* nel punto P . Proiettandola (ortogonalmente) sull'iperpiano tangente a V_n in P , si individua una direzione (q^*) , pure normale alla curva, detta *normale principale relativa*.

Designeremo con q_v^* i coseni direttori di (q^*) ; con Φ l'angolo compreso fra (q) e (q^*) ; e infine con α_v i coseni direttori di una generica (α) uscente da P e appar-

⁸⁾ L. BIANCHI, loc. cit. ¹⁾, pp. 365-367.

tenente a V_n (cioè al suo iperpiano tangente). Sarà manifestamente

$$\sum_v^N \alpha_v q_v = \cos \Phi \sum_v^N \alpha_v q_v^*,$$

quindi, moltiplicando per c e badando alle (5),

$$\sum_v^N \alpha_v y_v'' = c \cos \Phi \sum_v^N \alpha_v q_v^*.$$

Va rilevato che il secondo membro ha carattere intrinseco rispetto alla varietà V_n , si può cioè interpretare indipendentemente dallo spazio euclideo ambiente. Infatti

$$c \cos \Phi = \gamma$$

non è altro che la curvatura geodetica di C , e $\sum_v^N \alpha_v q_v^*$ il coseno dell'angolo χ fra (α) e la normale principale relativa (q^*) , direzioni appartenenti entrambe a V_n . Sussiste dunque (in dipendenza dall'assunta curva C), per qualsiasi direzione (α) di V_n , la relazione

$$(6) \quad \sum_v^N \alpha_v y_v'' = \gamma \cos \chi.$$

§ 2.

Direzioni parallele in V_n lungo una curva prefissata.

Supponiamo che ad ogni punto P di C corrisponda una direzione (α) appartenente a V_n . Saranno con ciò a riguardarsi funzioni di s i parametri di direzione $\xi^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) che definiscono la (α) entro V_n , nonchè i coseni direttori α_v ($v = 1, 2, \dots, N$) che la individuano nello spazio ambiente; e si avrà [come già per la direzione di C , a norma delle (4)]

$$(7) \quad \alpha_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_v}{\partial x_i} \xi^{(i)}.$$

Immaginiamo di far variare P lungo C . La condizione di parallelismo ordinario delle (α) (rispetto allo spazio ambiente S_N) implica eguaglianza degli angoli che esse formano con una medesima direzione, scelta a piacere.

Per arrivare ad una nozione di parallelismo attinente unicamente a V_n , consideriamo il fenomeno elementare, cioè il passaggio da P ad un punto infinitamente vicino.

Sia (f) una generica direzione fissa di S_N , f_v i relativi coseni direttori. Quando s si incrementa di ds , il coseno dell'angolo fra (α) ed (f) ,

$$\sum_v^N \alpha_v f_v,$$

subisce l'incremento

$$ds \sum_v^N \alpha_v' f_v.$$

L'ordinario parallelismo richiederebbe l'annullarsi di tale incremento per tutte le direzioni (f) , e porterebbe quindi alla costanza delle α_v .

Accontentiamoci di esigere che l'angolo fra (α) ed una (f) si mantenga invariato per le direzioni (f) appartenenti a V_n , ossia che l'incremento $ds \sum_v^N \alpha'_v f_v$ si annulli [non per tutte le (f) , ma soltanto] per queste direzioni tangenziali.

Ove si osservi che tali direzioni sono tutte e sole quelle conciliabili coi vincoli (1), appare manifesto (sostituendo alle f_v delle quantità proporzionali) che la condizione enunciata equivale alla seguente:

$$(I) \quad \sum_v^N \alpha'_v \delta y_v = 0$$

per tutti gli spostamenti δy_v conciliabili coi vincoli (1).

Avendosi, in base alle (1) stesse,

$$\delta y_v = \sum_k^n \frac{\partial y_v}{\partial x_k} \delta x_k$$

colle δx_k completamente arbitrarie, la (1) si scinde nelle n equazioni

$$(8) \quad \sum_v^N \alpha'_v \frac{\partial y_v}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

che costituiscono una traduzione formale del parallelismo delle (α) lungo la C .

§ 3.

Forma intrinseca delle condizioni di parallelismo.

Nelle (8) figurano le α_v e le y_v , che hanno relazione collo spazio ambiente. Si può liberarsene, facendo in definitiva intervenire solo elementi spettanti alla metrica della V_n .

All'uopo si comincia col sostituire ai coseni direttori α_v le loro espressioni (7) in funzione dei parametri di direzione $\xi^{(l)}$. Si ha, derivando rapporto all'arco s di C ,

$$\alpha'_v = \sum_l^n \frac{\partial y_v}{\partial x_l} \frac{d\xi^{(l)}}{ds} + \sum_{j,l}^n \frac{\partial^2 y_v}{\partial x_j \partial x_l} x'_j \xi^{(l)}.$$

D'altra parte, in virtù della (2),

$$a_{kl} = \sum_v^N \frac{\partial y_v}{\partial x_k} \frac{\partial y_v}{\partial x_l} \quad (k, l = 1, 2, \dots, n),$$

da cui segue, per i simboli di CHRISTOFFEL di prima specie,

$$\begin{aligned} a_{j|l,k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_v \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial y_v}{\partial x_k} \frac{\partial y_v}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial y_v}{\partial x_j} \frac{\partial y_v}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial y_v}{\partial x_j} \frac{\partial y_v}{\partial x_l} \right) \right] \\ &= \sum_v \frac{\partial^2 y_v}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial y_v}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (i, l, k = 1, 2, \dots, n).$$

Con ciò le (8) divengono

$$\sum_l a_{kl} \frac{d\xi^{(l)}}{ds} + \sum_{jl} a_{j|l,k} x'_j \xi_j^{(l)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Da queste, moltiplicando per $a^{(ik)}$ ⁹⁾, sommando rispetto a k (da 1 ad n), e ricordando le definizioni

$$\left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} = \sum_k a_{j|l,k} a^{(ik)} \quad (j, l, i = 1, 2, \dots, n)$$

dei simboli di CHRISTOFFEL di 2^a specie, si traggono le equazioni equivalenti

$$(I_a) \quad \frac{d\xi^{(i)}}{ds} + \sum_{jl} \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} x'_j \xi_j^{(l)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

che definiscono il modo di variare dei parametri $\xi^{(i)}$ lungo C , in base alla condizione che le direzioni da essi parametri individuate si mantengano parallele.

Dacchè C si considera preventivamente assegnata (e con essa le espressioni delle x e delle x' in funzione di s), i coefficienti $\sum_{jl} \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} x'_j$ d'ogni $\xi_j^{(l)}$ nelle (I_a) vanno riguardati come funzioni conosciute della variabile indipendente s . Le (I_a) stesse si presentano in conformità come n equazioni differenziali ordinarie nelle altrettante quantità $\xi^{(i)}$. Ne consegue, in base ai noti teoremi di esistenza, che, spiccata a piacimento una direzione da un punto qualsiasi P_0 di C , rimangono determinate le direzioni parallele per ogni altro punto P della curva.

§ 4.

Confronto col comportamento euclideo.

Sua proprietà caratteristica nei riguardi del parallelismo.

Per quanto s'è visto or ora, lungo la curva C , seguita a sussistere la proprietà elementare che da un punto P esce una sola direzione parallela ad altra assegnata per

⁹⁾ Con $a^{(ik)}$ si designano al solito i coefficienti della forma reciproca alla forma fondamentale

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik} dx_i dx_k.$$

P_0 . Va rilevato tuttavia che, mentre negli spazi euclidei la parallela per P è unica in senso assoluto, nella nostra V_n a metrica qualsiasi essa viene in generale a dipendere da C , ossia dal cammino lungo cui si passa da P_0 a P .

Si può anzi aggiungere che, se (per un punto qualsiasi P di un certo campo) la parallela (ad una qualsiasi direzione spiccata da altro punto P_0 del campo) è indipendente dal cammino, lo spazio V_n è (in quel campo) necessariamente euclideo.

Si osservi infatti che, dalle (I_a) , moltiplicando per ds e ponendo per brevità

$$X_j^{(i)} = \sum_l^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} \xi^{(l)},$$

risulta

$$(9) \quad d\xi^{(i)} = - \sum_j^n X_j^{(i)} dx_j.$$

La voluta indipendenza dal cammino richiede che le $d\xi^{(i)}$, e con esse i secondi membri delle (9), siano differenziali esatti, ciò che, designando con δx_j un secondo sistema di incrementi delle x_j , indipendenti dai dx_j e tali che $d\delta x_j = \delta dx_j$, si traduce nelle n identità

$$\delta \sum_j^n X_j^{(i)} dx_j = d \sum_j^n X_j^{(i)} \delta x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Esplicitando e notando che l'eguaglianza deve sussistere qualunque sieno i due sistemi di incrementi dx_j , δx_j , nonchè i valori (iniziali, e quindi anche generici) delle $\xi^{(l)}$, si è condotti automaticamente ad esprimere che si annullano tutti i simboli di RIEMANN ¹⁰⁾, ossia che si tratta di una varietà euclidea, C. D. D.

§ 5.

Altra forma delle equazioni (I_a) — Dipendenza da una sola funzione.

Nelle (I_a) figurano come elementi determinativi delle direzioni parallele (α) i parametri di direzione $\xi^{(i)} \left(= \frac{dx_i}{ds} \right)$, rappresentando ds la lunghezza di un elemento spiccato nella direzione (α) , e dx_i il corrispondente incremento della coordinata x_i . Questi $\xi^{(i)}$ costituiscono un sistema contravariante ¹¹⁾ (rispetto a qualsivoglia trasformazione

¹⁰⁾ Dal punto di vista metodologico, ove si ritenga effettivamente preferibile all'ordinaria trattazione dei simboli e della curvatura di RIEMANN quella che sarà esposta nei §§ 15-19, il teorema del testo dovrebbe figurare dopo quei paragrafi. Lo ho anticipato per comodo del lettore cui sono famigliari i simboli di RIEMANN.

¹¹⁾ Cfr. (in questo punto soltanto per le locuzioni) G. RICCI et T. LEVI-CIVITA, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* [Mathematische Annalen, Bd. LIV (1900), pp. 125-201].

delle coordinate generali x_i). Giova talora mettere in evidenza, invece del sistema contravariante $\xi^{(i)}$, il sistema covariante reciproco

$$(10) \quad \xi_i = \sum_k^n a_{ik} \xi^{(k)},$$

cioè i cosiddetti *momenti*.

Per trasformare in conformità le (I_a) , deriviamo materialmente le posizioni (10), introducendovi per le $\frac{d\xi^{(k)}}{ds}$ le espressioni fornite dalle (I_a) . Si ricava (dopo aver scambiato nell'ultimo termine l'indice di sommatoria k in l)

$$\frac{d\xi_i}{ds} = - \sum_{k,j,l}^n a_{ik} \left\{ \begin{matrix} j l \\ k \end{matrix} \right\} x'_j \xi^{(l)} + \sum_l^n \frac{d a_{il}}{ds} \xi^{(l)}.$$

Siccome

$$\sum_k^n a_{ik} \left\{ \begin{matrix} j l \\ k \end{matrix} \right\} = a_{jl,i},$$

e

$$\frac{d a_{il}}{ds} = \sum_j^n \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j} x'_j = \sum_j^n (a_{jl,i} + a_{ij,l}) x'_j,$$

così resta

$$(11) \quad \frac{d\xi_i}{ds} = \sum_{j,l}^n a_{ij,l} x'_j \xi^{(l)}.$$

Anche nel secondo membro si devono far apparire, non le $\xi^{(l)}$, ma i momenti: cosa ben facile a norma delle (10), che risolte danno

$$\xi^{(l)} = \sum_k^n a^{(lk)} \xi_k.$$

Con ciò, attese le espressioni dei simboli di CHRISTOFFEL di 2^a specie già richiamate nel precedente §, risulta

$$\sum_{j,l}^n a_{ij,l} x'_j \xi^{(l)} = \sum_{j,k}^n \left\{ \begin{matrix} i j \\ k \end{matrix} \right\} x'_j \xi_k,$$

e si hanno quindi (riponendo l per k come indice della sommatoria) le equazioni trasformate

$$(I_b) \quad \frac{d\xi_i}{ds} = \sum_{j,l}^n \left\{ \begin{matrix} i j \\ l \end{matrix} \right\} x'_j \xi_l \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Si osserverà che questo sistema (I_b) è l'*aggiunto* del precedente (I_a) . Infatti il coefficiente di ξ_i nella i^{esima} equazione (I_b) è eguale ed opposto al coefficiente di $\xi^{(i)}$ nella i^{esima} equazione (I_a) .

Alle equazioni in questione si può anche attribuire un terzo aspetto che ricorda, pur essendo in verità meno espressivo, la classica forma lagrangiana delle equazioni della dinamica.

L'analogia risiede in ciò che si fa capo ad una sola funzione di $3n$ argomenti $x_i, x'_i, \xi^{(i)}$,

$$(12) \quad B = \sum_{i,j}^n a_{ij} x'_i \xi^{(j)},$$

bilineare nelle $\xi^{(j)}$ (che fungono da incognite) e nelle x'_i (che sono, al pari delle x_i , funzioni assegnate di s).

Si ha dalle (10)

$$\xi_i = \frac{\partial B}{\partial x'_i},$$

e si constata immediatamente (con ovvi scambi di indici) che, per essere

$$a_{ij,l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} \right),$$

i secondi membri delle (11) possono essere scritti

$$\frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial x'_i} + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial B}{\partial x'_i} x'_j - \frac{\partial B}{\partial \xi^{(i)}} \xi^{(j)} \right).$$

Con ciò, dalle (11) stesse, che sono sostanzialmente equivalenti tanto alle (I_a) quanto alle (I_b), si ha l'annunciata forma involgente la sola B :

$$(I_c) \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial B}{\partial x'_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial B}{\partial x'_i} x'_j - \frac{\partial B}{\partial \xi^{(i)}} \xi^{(j)} \right).$$

§ 6.

Integrale quadratico — Conservazione degli angoli. Composizione di soluzioni ortogonali.

Le equazioni lineari (I_a) ammettono l'integrale quadratico

$$\sum_{i,j} a_{ij} \xi^{(i)} \xi^{(j)} = \text{cost.}$$

Lo si riconosce nel modo più spiccio notando che, in virtù delle (10), il primo membro si scrive

$$\sum_i \xi^{(i)} \xi_i,$$

ed ha quindi per derivata

$$\sum_i \left(\frac{d \xi^{(i)}}{ds} \xi_i + \frac{d \xi_i}{ds} \xi^{(i)} \right),$$

che si annulla identicamente in forza della (I_a) e delle equivalenti (I_b).

Del resto, anche senza verifica diretta, si può affermare la costanza di $\sum_i \xi^{(i)} \xi_i$, in base ad una nota proprietà dei sistemi aggiunti, dacchè (§ precedente) $\xi^{(i)}$ e ξ_i sono soluzioni di due sistemi siffatti.

Ovvio corollario dell'esistenza dell'integrale quadratico è che, se i valori iniziali

delle $\xi^{(i)}$ sono effettivamente parametri di direzione, e, come tali, rendono

$$(13) \quad \sum_{i,j} a_{ij} \xi^{(i)} \xi^{(j)} = 1,$$

la stessa relazione rimane soddisfatta per qualunque s , cioè le soluzioni $\xi^{(i)}$ conservano lungo C il carattere di parametri di direzione: circostanza implicita nella impostazione del problema, ma non a priori evidente nella sua formulazione analitica a mezzo delle (I_a) .

Altro corollario degno di nota è la conservazione, lungo C , dell'angolo α di due direzioni che si trasportano per parallelismo. Sieno infatti $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ i parametri di queste due direzioni, ξ_i , η_i i rispettivi momenti. Si ha

$$\cos \alpha = \sum_{i,j} a_{ij} \xi^{(i)} \eta^{(j)} = \sum_i \xi^{(i)} \eta_i = \sum_i \xi_i \eta^{(i)}.$$

Riferiamoci per es. all'ultima espressione, e deriviamo sostituendo a $\frac{d\xi_i}{ds}$ i valori forniti dalle (I_b) , a $\frac{d\eta^{(i)}}{ds}$ quelli forniti dalle (I_a) (previo mutamento di ξ in η). Il risultato è anche qui identicamente nullo,

C. D. D.

Dalla linearità delle equazioni di parallelismo — riferiamoci per es. alle (I_a) — segue che, se $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ sono soluzioni, lo è del pari una qualsiasi combinazione lineare a coefficienti costanti. Suppongasi in particolare che $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ sieno parametri di due direzioni (oltrechè parallele) ortogonali fra loro, e si assuma

$$\zeta^{(i)} = \cos \alpha \xi^{(i)} + \sin \alpha \eta^{(i)}$$

con α costante. Si ha ovviamente

$$\sum_{i,j} a_{ij} \zeta^{(i)} \zeta^{(j)} = 1; \quad \sum_i \zeta^{(i)} \zeta_i = \cos \alpha, \quad \sum_i \zeta^{(i)} \eta_i = \sin \alpha,$$

sicchè le $\zeta^{(i)}$ costituiscono i parametri di una direzione che, mentre ottempera lungo C alla condizione di parallelismo, appartiene alla giacitura individuata dalle prime due, formando con esse in ogni punto sempre gli stessi angoli α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

L'osservazione si estende agevolmente a quante si vogliono soluzioni mutuamente ortogonali, e dà luogo al seguente enunciato espressivo: *Ogni direzione che, spostandosi lungo C , si mantiene rigidamente collegata con direzioni parallele soddisfa essa stessa alla condizione di parallelismo.*

§ 7.

Geodetiche — Loro proprietà caratteristica nei riguardi della direzione.

Le equazioni delle geodetiche di V_n sono notoriamente

$$x''_i + \sum_{j,l} \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} x'_j x'_l = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Da esse segue che, se C è geodetica, le (I_a) ammettono la soluzione $\xi^{(i)} = x'_i$, e reciprocamente. Si ha pertanto: *La direzione di una geodetica in un suo punto qualsiasi è sempre parallela alla direzione iniziale; reciprocamente ogni curva che gode di questa proprietà è geodetica.*

Risulta così estesa alle geodetiche di una varietà qualunque una discriminante delle rette negli spazi euclidei. E in pari tempo rimane acquisito che sono necessariamente concomitanti la conservazione della direzione e (l'altra discriminante delle geodetiche, cioè) la proprietà integrale di minimizzare la distanza.

§ 8.

Inclinazione sulla curva di trasporto.

Giova rilevare una espressiva combinazione lineare delle (I_a) . Per evitare gli sviluppi materiali, risaliremo alla formula (I), che è la genesi delle equazioni differenziali e sostanzialmente equivale ad esse. Detta formula deve sussistere per ogni spostamento δy_v , e quindi per ogni direzione, appartenente a V_n . Consideriamo in particolare la direzione tangente a C , ponendo nella (I) y'_v al posto di δy_v . Risulta

$$\sum_v^N \alpha'_v y'_v = 0,$$

che si può scrivere

$$\frac{d}{ds} \sum_v^N \alpha_v y'_v = \sum_v^N \alpha_v y''_v.$$

Chiamando ψ l'angolo che la direzione (α) (del cui parallelismo si tratta) fa con C e badando alla (6), si ha la relazione che volevamo stabilire

$$(14) \quad \frac{d}{ds} \cos \psi = \gamma \cos \chi.$$

Ricordiamo (§ 1) che γ rappresenta la curvatura geodetica di C , e χ l'angolo compreso fra (α) e la normale principale di C (relativa a V_n). La (14) fornisce quindi la legge con cui varia, lungo la curva di trasporto C , l'inclinazione ψ (sulla stessa C) di un fascio di direzioni parallele.

Se C è geodetica, $\gamma = 0$, e quindi $\cos \psi = \text{cost.}$, ossia: *direzioni parallele lungo una geodetica formano sempre il medesimo angolo colla geodetica stessa.* Questo è del resto un caso particolare della conservazione degli angoli rilevata a § 6: basta tener presente (§ precedente) che le direzioni di una geodetica sono tutte parallele tra loro.

Se C è qualunque, ma si tratta di uno spazio euclideo, la (14) si identifica col primo gruppo delle formule di FRENET.

§ 9.

Caso delle ordinarie superficie.

Per $n = 2$, le varie direzioni uscenti da un medesimo punto di C rimangono univo-

camente determinate dall'angolo ψ , purchè vi si associ un dato qualitativo: il verso in cui, a partire dalla direzione positiva di C , deve contarsi ψ . Ne consegue che (con opportuna specificazione qualitativa) basta la (14) a definire univocamente le direzioni parallele lungo una generica curva della superficie. Si può specificare come segue: Detta (q^*) la normale principale relativa (proiezione sul piano tangente alla superficie della normale principale di C), immaginiamo di contare ψ verso (q^*) [si intende, a partire dalla direzione positiva di C , attraverso l'angolo retto, che questa forma con (q^*)]. L'angolo ψ , inteso a questo modo, può non essere il minimo angolo fra C ed (α), cui si riferisce la (14) (ma quello concavo che completa il giro); comunque il suo coseno coincide in ogni caso col $\cos \psi$ della (14), avendosi ulteriormente (per l'attuale ψ) $\sin \psi = \cos \chi$.

La (14) assume così la forma semplificata

$$(15) \quad \frac{d\psi}{ds} = -\gamma.$$

Già ci siamo occupati nel precedente § del caso $\gamma = 0$ per n qualunque. Per le superficie, si può aggiungere che l'ordinaria nozione di parallelismo geodetico rientra nella nostra nozione generale di parallelismo. Infatti, curve geodeticamente parallele hanno per traiettorie ortogonali curve geodetiche; esse possono quindi dirsi parallele) nel senso da noi attribuito a tale qualifica) rispetto a ognuna di queste geodetiche, essendo, per entrambe le curve, $\psi = \frac{\pi}{2}$, ovvero $\psi = \frac{3\pi}{2}$.

Lasciamo il caso di C geodetica e prendiamo un esempio particolare. Supponiamo che si tratti di una superficie sferica, e che C ne sia un parallelo. La direzione (q^*) in un punto generico è quella del meridiano, verso il polo di C . Se λ è la latitudine (relativa all'emisfero che contiene il polo di C) e R il raggio della sfera,

$$\gamma = \frac{1}{R \cos \lambda}.$$

D'altra parte, ove si immagini di percorrere il parallelo nel senso in cui cresce la longitudine φ ,

$$ds = R \cos \lambda d\varphi,$$

talchè la (15) si riduce a

$$d\psi = -d\varphi.$$

L'angolo ψ varia dunque uniformemente colla longitudine, e decresce di 2π in un giro completo. La direzione parallela ad una iniziale prefissata risulta così funzione *uniforme* dei punti di un parallelo.

Una tale uniformità non sussiste tuttavia necessariamente per altre curve chiuse: ad es., percorrendo il perimetro di un triangolo geodetico, ψ subisce l'incremento $2\pi - \varepsilon$ (ε eccesso sferico). Lo si riconosce immediatamente pensando che ψ resta co-

stante lungo i lati e subisce nei vertici incrementi bruschi rappresentati dai supplementi degli angoli.

§ 10.

Spazi a curvatura costante — Osservazione sul parallelismo di CLIFFORD.

Vogliamo mostrare che, per gli spazi a curvatura costante ¹²⁾ (di quante si vogliono dimensioni) le equazioni di parallelismo *lungo una geodetica* si integrano a vista, proprio come nel caso esaminato or ora di varietà qualunque, ma a due sole dimensioni.

Riferiamoci, per fissare le idee, ad una V_n di curvatura costante $= 1$, ciò che è lecito senza pregiudizio della generalità, ogniqualvolta (come nella questione analitica di cui intendiamo occuparci) non è necessario distinguere il reale dall'immaginario. La nostra V_n si può in conformità riguardare come una ipersfera di uno spazio euclideo a $n + 1$ dimensioni, rappresentato in coordinate cartesiane dalla equazione

$$(16) \quad \sum_{v=1}^{n+1} y_v^2 = 1.$$

Nel caso presente è forse vantaggioso non ricorrere a coordinate intrinseche della V_n , immaginandone sia i punti che le direzioni definiti per mezzo dei loro elementi determinativi nello spazio euclideo ambiente: i punti per mezzo delle loro coordinate cartesiane y_v vincolate dalla (16); le direzioni (α), per mezzo dei loro coseni direttori α_v , legati, oltre che da

$$(17) \quad \sum_{v=1}^{n+1} \alpha_v^2 = 1,$$

anche dalla condizione

$$(18) \quad \sum_{v=1}^{n+1} \alpha_v y_v = 0$$

di appartenenza a V_n (cioè all'iperpiano tangente).

Data in V_n una linea geodetica C , esaminiamo come devono variare le $\alpha_v(s)$ lungo C perchè ne rimangano individuate direzioni parallele (in V_n). Riprendiamo perciò la (I) del § 2 e notiamo che i vincoli (1) sono ora rappresentati dalla sola equazione (16). Il classico procedimento di LAGRANGE consente senz'altro di sostituire alla (I) le equazioni esplicite

$$(19) \quad \alpha'_v = \mu y_v \quad (v = 1, 2, \dots, n+1),$$

in cui μ designa un moltiplicatore a priori indeterminato.

Se ne deve far sistema colla (18), risultandone così definite tanto le α quanto la

¹²⁾ Anche a questo proposito si intenderà ripetuta l'avvertenza della nota ¹⁰⁾.

μ . La (17) è poi effettivamente compatibile colle (18), (19), poichè da queste segue

$$\frac{d}{ds} \sum_v^{n+1} \alpha_v^2 = 2 \sum_v^{n+1} \alpha_v \alpha'_v = 2 \mu \sum_v^{n+1} \alpha_v y_v = 0.$$

Ciò posto, teniamo presente che, ψ essendo l'angolo fra (α) e C ,

$$\cos \psi = \sum_v^{n+1} \alpha_v y'_v,$$

e che (§ 8) quest'angolo si conserva costante (al variare di s) in virtù dell'ipotesi che C sia geodetica.

Ora la (18), derivando e badando alle (19) e (16), dà

$$\mu + \cos \psi = 0,$$

sicchè le (19) assumono la forma

$$\alpha'_v = -\cos \psi \cdot y_v,$$

e la determinazione dei coseni α_v appare ridotta a quadrature. In realtà non ce n'è neppure bisogno. Basta osservare in primo luogo che, per $\cos \psi = 0$, cioè *per le direzioni ortogonali a C* , risulta $\alpha'_v = 0$, sicchè *il parallelismo in V_n è caratterizzato dalla costanza delle α_v e coincide quindi col parallelismo ordinario nello spazio ambiente. Quanto alle direzioni non ortogonali a C , si può ricorrere all'enunciato finale del § 6 desumendone che la condizione di parallelismo (entro V_n) consiste nel formare gli stessi angoli sia con C che con $n - 1$ direzioni fisse (indipendenti) ortogonali a C , nonchè, ben si intende, tangenti all'ipersfera (16).*

Consideriamo in particolare una V_3 . Il comportamento ora rilevato di direzioni parallele, uscenti ortogonalmente dai punti di una stessa geodetica C , rende manifesto che non c'è rapporto col cosiddetto parallelismo di CLIFFORD. Infatti, se si considerano ∞^1 geodetiche, parallele secondo CLIFFORD, spiccate dai punti di una geodetica C , queste risultano bensì normali alla C , ma le loro tangenti *non* sono parallele nello spazio ambiente ¹³⁾.

§ 11.

Riduzione delle equazioni di parallelismo al tipo emisimmetrico.

Il sistema differenziale (I_a) ammette (§ 6) un integrale quadratico. Ciò consente

¹³⁾ Per giustificare questa affermazione, si può ragionare come segue.

Si ricorda anzitutto [L. BIANCHI, loc. cit. ¹⁾, pag. 446] che le geodetiche costituenti una congruenza di CLIFFORD sono rappresentate parametricamente da formule del tipo

$$(1) \quad y_v = a_v \cos s + \sin s \sum_p^4 c_{vp} a_p \quad (v = 1, 2, 3, 4),$$

dove il parametro s si identifica coll'arco, i coefficienti costanti c_{vp} , caratteristici della congruenza, sod-

di affermare ¹⁴⁾ che è possibile, con una conveniente trasformazione lineare delle incognite, ridurre il sistema stesso alla forma emisimmetrica

$$(II) \quad \frac{d\tilde{z}_h}{ds} = \sum_k^n p_{hk} \tilde{z}_k \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

caratterizzata dalle relazioni

$$(20) \quad p_{hk} + p_{kh} = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, n)$$

fra i coefficienti (i quali del resto si suppongono funzioni qualunque di s). All'uopo basta che la trasformazione lineare fra le $\xi^{(i)}$ e le \tilde{z}_h attribuisca all'integrale quadratico la forma canonica

$$\sum_h^n \tilde{z}_h^2 = \text{cost.}$$

Per raggiungere concretamente l'intento, illustrando nel tempo stesso la trasformazione sotto l'aspetto geometrico, conviene procedere come segue.

Da ogni punto P della C , immaginiamo spiccate (con criterio arbitrario) $n - 1$ direzioni che, assieme a quella di C , costituiscano un'ennupla ortogonale Ω . Facendo corrispondere queste direzioni ai numeri $1, 2, \dots, n - 1$, indichiamo, per l' h^{esima} , con $\lambda_p^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) i parametri, cioè il sistema coordinato contravariante, e con $\lambda_{h/i}$

disfanno alla duplice condizione di emisimmetria ($c_{\nu\rho} + c_{\rho\nu} = 0$) e di ortogonalità; le a_ν (valori iniziali delle y_ν) sono legate dalla (16), variando del resto (in tutti i modi possibili) dall'una all'altra delle varie geodetiche della congruenza.

Moltiplichiamo le (1) per $c_{\mu\nu}$, e sommiamo rispetto all'indice ν da 1 a 4. Attese le identità

$$\sum_\nu^4 c_{\mu\nu} c_{\nu\rho} = - \sum_\nu^4 c_{\mu\nu} c_{\rho\nu} = - \varepsilon_{\mu\rho} \quad (\mu, \rho = 1, 2, 3, 4; \varepsilon_{\mu\rho} = 0 \text{ per } \mu \neq \rho \text{ ed } = 1 \text{ per } \mu = \rho),$$

si ha subito (cambiando a calcolo eseguito μ in ν e ν in ρ)

$$(2) \quad \sum_\rho^4 c_{\nu\rho} y_\rho = \cos s \sum_\rho^4 c_{\nu\rho} a_\rho - a_\nu \sin s \quad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

I coseni direttori di una qualunque delle curve (1) (in un suo punto generico) sono evidentemente rappresentati dalle derivate delle y_ν rapporto all'arco:

$$y'_\nu = -a_\nu \sin s + \cos s \sum_\rho^4 c_{\nu\rho} a_\rho,$$

le quali, in virtù delle (2), possono esprimersi in funzione delle coordinate y_ν (del punto da cui si imagina spiccata la geodetica della congruenza) sotto la forma

$$y'_\nu = \sum_\rho^4 c_{\nu\rho} y_\rho \quad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Siccome il determinante delle $c_{\nu\rho}$ non si annulla (il suo valore assoluto è 1), così a due punti diversi non possono mai corrispondere gli stessi coseni. È dunque escluso che vi sia una C , da tutti i punti della quale escano geodetiche di una congruenza di CLIFFORD sotto eguale direzione. C. D. D.

¹⁴⁾ Cfr. per es. DARBOUX, loc. cit. ⁶⁾.

i momenti (sistema coordinato covariante). Per uniformità di notazione, attribuiremo l'indice n alla direzione di C che completa l'ennupla, e porremo in conformità

$$(21) \quad x'_i = \lambda_n^{(i)}, \quad \sum_j^n a_{ij} x'_j = \lambda_{n/i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Varranno perciò le relazioni caratteristiche delle ennuple ortogonali

$$(22) \quad \sum_i^n \lambda_{h/i} \lambda_k^{(i)} = \varepsilon_{hk} \quad (h, k = 1, 2, \dots, n)$$

col solito significato delle ε_{hk} (o per $h \neq k$, 1 per $h = k$).

La Ω , e per essa le varie λ , vanno naturalmente considerate (al pari delle x_i , x'_i) funzioni note di s .

Ciò premesso, ecco come si esplicita la voluta trasformazione lineare. Si assumono come elementi determinativi delle direzioni parallele, al posto dei parametri $\xi^{(i)}$ (o degli elementi reciproci ξ_i) i coseni $\tilde{\lambda}_b$ degli angoli che vengono a formarsi in ogni punto colle direzioni dell'ennupla. L'identità geometrica

$$\sum_b^n \tilde{\lambda}_b^2 = 1$$

assicura senz'altro che si arriverà ad un sistema trasformato emisimmetrico. Sviluppiamo anche il calcolo onde procurarci l'espressione esplicita dei coefficienti p_{hk} .

Le nuove incognite $\tilde{\lambda}_b$ sono, per loro definizione, legate alle $\xi^{(i)}$, o rispettivamente alle ξ_i , dalle equazioni

$$(23_a) \quad \tilde{\lambda}_b = \sum_i^n \xi^{(i)} \lambda_{b/i},$$

$$(23_b) \quad \tilde{\lambda}_b = \sum_i^n \xi_i \lambda_b^{(i)} \quad (b = 1, 2, \dots, n).$$

In base alle (22), queste possono essere risolte sotto le forme rispettive

$$(24_a) \quad \xi^{(i)} = \sum_k^n \tilde{\lambda}_k \lambda_k^{(i)},$$

$$(24_b) \quad \xi_i = \sum_k^n \tilde{\lambda}_k \lambda_{k/i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Deriviamo le (23_a) rapporto ad s , badando alle (I_a) [in cui, a norma delle (21), si scriva $\lambda_n^{(j)}$ per x'_j], e sostituendo nei secondi membri (a derivazione eseguita), in luogo delle $\xi^{(i)}$ (o $\xi^{(l)}$), i valori (24_a). Ove per brevità si ponga

$$(25_a) \quad p_{hk} = \sum_i^n \frac{d \lambda_{h/i}}{ds} \lambda_k^{(i)} - \sum_{i,j,l}^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} \lambda_n^{(j)} \lambda_k^{(l)} \lambda_{h/i} \quad (h, k = 1, 2, \dots, n),$$

si è evidentemente condotti alle (II). Però i valori (25_a) dei coefficienti non mettono in diretta evidenza il carattere emisimmetrico di cui, per le precedenti osservazioni, de-

vono essere necessariamente dotati. Si potrebbe farlo scaturire con trasformazioni materiali, tenendo conto delle (22) e della struttura dei simboli di CHRISTOFFEL. Ma la verifica si fa più comodamente, notando che le stesse equazioni differenziali nelle χ_h , cui siamo testè pervenuti, si devono pur ricavare operando collo stesso criterio, anzichè sulle (23_a), (24_a), (I_a), sulle equivalenti (23_b), (24_b), (I_b). Il calcolo fatto a questo modo porge per i coefficienti p_{hk} le nuove espressioni

$$(25_b) \quad p_{hk} = \sum_i^n \frac{d\lambda_b^{(i)}}{ds} \lambda_{k/i} + \sum_{i,j,l}^n \left\{ \begin{matrix} i & j \\ & l \end{matrix} \right\} \lambda_n^{(j)} \lambda_{k/l} \lambda_b^{(i)} \quad (h, k = 1, 2, \dots, n).$$

Dal confronto delle (25_a) colle (25_b) scende l'annunciata riprova formale.

Infatti, sommando l'espressione di p_{hk} data dalle (25_a) con quella di p_{kh} data dalle (25_b), i due $\sum_{i,j,l}$ si elidono identicamente (come si constata, scambiando in uno di essi gli indici i ed l), e rimane

$$p_{hk} + p_{kh} = \sum_i^n \left(\frac{d\lambda_{h/i}}{ds} \lambda_k^{(i)} + \frac{d\lambda_k^{(i)}}{ds} \lambda_{h/i} \right),$$

che va pure a zero, in virtù delle (22).

Il sistema lineare (II) a determinante gobbo costituisce un'evidente generalizzazione di quello che si incontra nella cinematica dei corpi rigidi per determinare il moto degli assi solidali, quando è assegnata la velocità angolare. Circa la teoria di questi sistemi differenziali rimandiamo ai lavori già citati nell'introduzione [note 4) a 7)]. Vogliamo tuttavia rilevare qualche proprietà elementare:

1° Eseguito sulle incognite χ_h una sostituzione ortogonale arbitraria (a coefficienti dipendenti comunque da s), il sistema trasformato è dello stesso tipo. La dimostrazione scende subito dall'osservare che l'integrale quadratico $\sum_b^n \chi_b^2 = \text{cost.}$ [la cui esistenza è caratteristica pei sistemi emisimmetrici (II)] conserva inalterata la sua forma quando si sottopongono le χ_h a trasformazioni ortogonali.

2° Se la C è geodetica, le equazioni di parallelismo (I_a) sono soddisfatte (cfr. § 7) da $\xi^{(i)} = x'_i = \lambda_n^{(i)}$, e per conseguenza [a tenore delle (22) e (23_a)] le (II) da

$$(26) \quad \chi_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n-1), \quad \chi_n = 1.$$

Ciò esige

$$(27) \quad p_{hn} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n-1),$$

per qualunque valore di s . Reciprocamente, se sussistono le (27), le equazioni (II) ammettono la soluzione (26), e la C è geodetica.

3° Sempre nell'ipotesi di C geodetica, la riduzione del sistema (II) in base alla conoscenza della soluzione particolare (26) è, per così dire, automatica. Infatti, in virtù delle (27), le prime $n-1$ equazioni (II) sono esenti da χ_n , e l' n^{esima} si riduce a $\frac{d\chi_n}{ds} = 0$.

4° Qualunque sia C , se si conoscono m direzioni parallele indipendenti, cioè m soluzioni indipendenti delle originarie equazioni (I_a), si sa dalla teoria generale dei sistemi lineari che è possibile una riduzione di m unità. Vogliamo far vedere che la riduzione effettiva si raggiunge qui ancora in modo semplicissimo. Ed ecco come.

Si comincia (sfruttando l'osservazione finale del § 6) col normalizzare le m soluzioni conosciute, deducendone altrettante mutuamente ortogonali (il che si fa con operazioni razionali). Si immagina poi di sostituire all'originaria ennupla di direzioni Ω associata ad ogni punto di C (che comprende la direzione di C e altre $n-1$ ad essa ortogonali) una nuova ennupla ortogonale Ω^* , in cui figurino le nostre m direzioni provenienti per ortogonalizzazione dalle soluzioni conosciute.

I coseni direttori χ_b^* (di una direzione qualsiasi) rispetto ad Ω^* risultano legati ai coseni direttori χ_b , che si riferiscono alla Ω , da una sostituzione ortogonale. Il sistema (II), trasformato nelle χ_b^* (che conserva il tipo emisimmetrico), viene così ad ammettere, per costruzione, m soluzioni distinte del tipo: $n-1$ delle χ^* nulle e l' n^{esima} eguale all'unità. Supposto che questa sia, per le m soluzioni di cui si tratta, rispettivamente $\chi_n^*, \chi_{n-1}^*, \dots, \chi_{n-m+1}^*$, si riconosce subito che deve annullarsi ogni p_{bk} per

$$b = 1, 2, \dots, n-m, \quad k = n-m+1, n-m+2, \dots, n,$$

sicchè le prime $n-m$ equazioni trasformate costituiscono un sistema ridotto (sempre di tipo emisimmetrico) comprendente soltanto le incognite $\chi_1^*, \chi_2^*, \dots, \chi_{n-m}^*$, C. D. D.

§ 12.

Spazi a tre dimensioni.

Per $n=3$, il sistema (II) è propriamente quello da cui dipende la teoria del triedro mobile ¹⁵⁾: non c'è che da mettere in luce la diversa interpretazione dei risultati, con riguardo al parallelismo in una V_3 , lungo una assegnata curva C . Limitiamoci al caso più semplice, in cui la C è geodetica. Per l'osservazione 3^a del § precedente, il sistema differenziale (II) in χ_1, χ_2, χ_3 si riduce in questo caso (a $\chi_3 = \text{cost.}$, associato) al sistema binario

$$\frac{d\chi_1}{ds} = p_{12}\chi_2, \quad \frac{d\chi_2}{ds} = p_{21}\chi_1.$$

Attesa la relazione $p_{12} + p_{21} = 0$, si ha l'integrale $\chi_1^2 + \chi_2^2 = \text{cost.}$; designando la costante con r^2 , potremo porre in conformità $\chi_1 = r \cos \varpi$, $\chi_2 = r \sin \varpi$, con che si ottiene una sola equazione in ϖ

$$\frac{d\varpi}{ds} = p \quad (p = -p_{12} = p_{21}).$$

¹⁵⁾ G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 2^e édition, t. I (Paris, Gauthier-Villars, 1914), Chap. II, pp. 27-41.

Come si vede, siamo ricondotti ad una semplice quadratura.

§ 13.

Legame delle p_{hk} coi coefficienti di rotazione di RICCI.

Supponiamo che la C faccia parte di una congruenza (assegnata, ma qualunque) di curve in V_n . In tale ipotesi le $\lambda_n^{(i)}$ e così le $\lambda_{n/i}$ possono risguardarsi come funzioni di x_1, x_2, \dots, x_n , le quali, lungo C , si riducono, pel tramite delle (3), alle funzioni di s precedentemente considerate (§ 11).

A questa congruenza, di cui fa parte la C , immaginiamo di associarne altre $n-1$ in modo da costituire un'ennupla ortogonale, coll'unica condizione di identificarsi con Ω nei punti di C ; e sieno $\lambda_b^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\lambda_{b/i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i rispettivi sistemi coordinati contravariante e covariante.

Si avrà così, lungo C ,

$$\frac{d\lambda_{b/i}}{ds} = \sum_1^n \frac{\partial \lambda_{b/i}}{\partial x_j} x'_j = \sum_1^n \frac{\partial \lambda_{b/i}}{\partial x_j} \lambda_n^{(j)},$$

e la (25_a) (scambiando nel secondo termine i due indici di sommatoria i ed l) potrà essere scritta

$$p_{hk} = \sum_1^n \lambda_{ij}^{(i)} \lambda_n^{(j)} \left[\frac{\partial \lambda_{b/i}}{\partial x_j} - \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} ij \\ l \end{matrix} \right\} \lambda_{b/l} \right].$$

Nella quantità in parentesi riconosciamo la derivata covariante ¹⁶⁾ $\lambda_{b/i,j}$, talchè, ricordando le formule di definizione dei coefficienti di rotazione,

$$\gamma_{hkn} = \sum_1^n \lambda_{b/i,j} \lambda_n^{(i)} \lambda_n^{(j)},$$

si è condotti alla conclusione

$$p_{hk} = \gamma_{hkn} \quad (h, k = 1, 2, \dots, n).$$

Ora si sa che $\gamma_{hkn} ds$ ammette, in quanto coefficiente di rotazione, l'interpretazione seguente: Quando l'origine dell'ennupla Ω si sposta di ds lungo C , passando da un punto generico P ad un punto vicinissimo P' , la direzione b ¹⁷⁾ in P' non rimane in generale ortogonale alla direzione k corrispondente al punto P , ma forma con essa l'angolo

$$\frac{\pi}{2} - \gamma_{hkn} ds.$$

Identica interpretazione compete pertanto a $p_{hk} ds$, e così, anche sotto questo aspetto

¹⁶⁾ Cfr. RICCI et LEVI-CIVITA, loc. cit. ¹¹⁾.

¹⁷⁾ Si vuol dire la direzione definita dai parametri $\lambda_b^{(i)}$ (o dai momenti $\lambda_{b/i}$).

geometrico, si ravvisa nei sistemi (II) la generalizzazione della teoria elementare del triedro mobile.

§ 14.

Varietà con una congruenza di curve parallele rispetto a qualsivoglia trasversale.

Sia $\xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ il sistema coordinato covariante di una congruenza di curve in V_n . Vogliamo provarci a supporre che le curve di questa congruenza siano incondizionatamente parallele, ossia che soddisfino alle condizioni di parallelismo lungo qualsiasi linea C . Scegliendo in particolare per C una linea della congruenza, appare intanto che questa deve essere costituita da geodetiche (§ 7). In generale, tutto si riduce ad esprimere che le equazioni di parallelismo (in una qualunque delle forme loro attribuite), per es. le (I_b) , sono verificate in ogni punto di V_n ¹⁸⁾ e per qualsiasi direzione x'_j .

Dacchè, esplicitando le $\frac{d\xi_i}{ds}$, le (I_b) si scrivono

$$\sum_1^n x'_j \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} ij \\ l \end{matrix} \right\} \xi_l \right] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

le ξ_i dovranno verificare le n^2 equazioni

$$(28) \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} ij \\ l \end{matrix} \right\} \xi_l = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

le quali stanno ad esprimere che si annulla identicamente il sistema covariante ξ_{ij} primo derivato del sistema ξ_i .

Dalle (28) segue in particolare

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i},$$

donde apparisce che le ξ_i sono le derivate di una medesima funzione F . Perciò la (13), o, se si vuole, la equivalente

$$\sum_1^n a^{(ij)} \xi_i \xi_j = 1,$$

diviene

$$\Delta F = 1 \quad (\Delta \text{ parametro differenziale di } 1^\circ \text{ ordine}),$$

mostrandoci che le ipersuperficie $F = \text{cost.}$ (di cui le curve della nostra congruenza costituiscono le traiettorie ortogonali) sono geodeticamente parallele.

¹⁸⁾ Si intende, al solito, di quel campo di V_n che si considera, entro cui si suppongono soddisfatte debite limitazioni qualitative.

Assumiamo per semplicità la funzione F come coordinata x_n , associandole, come coordinate x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , $n - 1$ integrali indipendenti della equazione

$$\nabla(x_n, \Theta) = 0 \quad (\nabla \text{ parametro differenziale misto}),$$

con che le ipersuperficie coordinate $x_b = \text{cost.}$ ($b = 1, 2, \dots, n - 1$) sono ortogonali alle $x_n = \text{cost.}$ Potremo in conformità ritenere

$$(29) \quad a^{(nj)} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n - 1), \quad a^{(nn)} = 1,$$

nonchè

$$\xi_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n - 1), \quad \xi_n = 1;$$

e le (28) si ridurranno a

$$\left\{ \begin{matrix} ij \\ n \end{matrix} \right\} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

o addirittura, badando alle identità

$$\left\{ \begin{matrix} ij \\ n \end{matrix} \right\} = \sum_b^n a^{(bn)} a_{ij,b}$$

e alle (29), alle seguenti:

$$a_{ij,n} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Ove si noti che le (29) equivalgono alle analoghe relative agli elementi reciproci:

$$(29') \quad a_{nj} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n - 1), \quad a_{nn} = 1,$$

e si tenga presente che

$$a_{ij,n} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{in}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{nj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_n} \right),$$

risulta in definitiva

$$(28') \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_n} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n - 1).$$

Le (29') e (28') mettono in evidenza che il ds^2 assume la forma

$$(30) \quad dx_n^2 + d\sigma^2,$$

designando $d\sigma^2$ il quadrato di un arbitrario elemento lineare nelle $n - 1$ variabili x_1, x_2, \dots, x_{n-1} (a coefficienti indipendenti da x_n).

Siccome ¹⁹⁾ la forma (30) è caratteristica per le varietà che posseggono una semplice infinità di *superficie geodetiche* ²⁰⁾, così riconosciamo che sono in ogni caso conco-

¹⁹⁾ Cfr. J. HADAMARD, *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions* [Bulletin des Sciences Mathématiques, t. XXV (1901), pp. 37-40].

²⁰⁾ Si dicono superficie geodetiche quelle (eventuali) varietà a $n - 1$ dimensioni immerse in una V_n , le quali contengono tutta intera la geodetica di V_n , che congiunge due loro punti qualsivogliano.

mitanti per una varietà V_n le due proprietà di ammettere ∞^1 superficie geodetiche e di contenere una congruenza a parallelismo completo.

§ 15.

Differenziali di 2° ordine — Determinazioni invariantive — Lemma di RICCI.

In una data ricerca, sieno fissate le variabili indipendenti, per es. x_1, x_2, \dots, x_n . Come si sa dal calcolo, è sempre lecito risguardarne nulli i differenziali secondi $d^2 x_1, d^2 x_2, \dots, d^2 x_n$. Una tale convenzione non ha però carattere invariantivo di fronte ai cambiamenti di variabili. Infatti, se si sostituiscono alle x_i n loro combinazioni indipendenti $\alpha_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, i differenziali secondi

$$d^2 \alpha_i = \sum_{j,l} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x_j \partial x_l} dx_j dx_l$$

(calcolati in base alla ipotesi $d^2 x_i = 0$) risultano in generale diversi da zero.

Se si associa alle variabili una forma differenziale quadratica, riferendosi per es. alla metrica di una V_n (colle notazioni dei §§ precedenti), diviene agevole una caratterizzazione invariantiva. Basta assumere i $d^2 x_i$ (non nulli, ma) definiti come segue:

$$d^2 x_i + \sum_{j,l} \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} dx_j dx_l = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Dalle equazioni delle geodetiche (§ 7), moltiplicate per ds^2 , apparisce che tali $d^2 x_i$ sono quelli che spettano alle variabili lungo la geodetica spiccata dal punto generico (x_1, x_2, \dots, x_n) nella direzione pure generica $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$. Questa interpretazione geometrica assicura a priori che la convenzione suaccennata possiede il voluto carattere invariantivo, senza rendere necessaria una verifica materiale, che si potrebbe del resto effettuare in modo ovvio.

Analogamente per la sovrapposizione di due sistemi indipendenti di incrementi dx_i e δx_i . Si potrebbe porre $d\delta x_i = \delta dx_i = 0$, ma, mentre l'invertibilità degli incrementi d e δ possiede, come facilmente si riconosce, carattere invariantivo, lo stesso non è delle posizioni $d\delta x_i = 0$. Noi le sostituiamo con

$$(31) \quad d\delta x_i + \sum_{j,l} \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} dx_i \delta x_j = 0,$$

le quali implicano

$$(31') \quad d\delta x_i = \delta dx_i,$$

e contengono come caso particolare, per $d = \delta$, le precedenti espressioni dei $d^2 x_i$.

L'invarianza delle (31), di fronte ai cambiamenti di variabili, può qui ancora essere desunta dalla interpretazione geometrica. Basta osservare che, ponendo materialmente $\delta x_i = \varepsilon \xi^{(i)}$ (con ε costante infinitesima) le (31) si identificano colle (I_a) , talchè esprimono come devono alterarsi le δx_i , per effetto dello spostamento $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$,

onde definire direzioni parallele fra loro. Questa proprietà invariantiva, oltre che con una verifica diretta, si potrebbe controllare con un elegante artificio formale accennato da RIEMANN ²¹⁾ e reso esplicito da WEBER ²²⁾.

Dalle (31), tenuto presente che

$$d a_{ik} = \sum_j^n \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} d x_j = \frac{1}{2} \sum_j^n (a_{ij,k} + a_{jk,i}) d x_j = \frac{1}{2} \sum_{j,l}^n \left[a_{lk} \left\{ \begin{matrix} ij \\ l \end{matrix} \right\} + a_{li} \left\{ \begin{matrix} jk \\ l \end{matrix} \right\} \right] d x_j,$$

scende identicamente

$$(32) \quad d \sum_{ik}^n a_{ik} \delta x_i \delta x_k = 0,$$

come pure

$$d \sum_{ik}^n a_{ik} d x_i \delta x_k = 0.$$

Queste relazioni equivalgono al risultato ben noto di calcolo differenziale assoluto che si annulla identicamente il sistema derivato covariante dei coefficienti a_{ik} della forma fondamentale (lemma di RICCI).

§ 16.

Differenziali d'ordine superiore.

Invariante, che compendia i simboli di RIEMANN, fornendone nel modo più diretto l'espressione esplicita.

Mercè applicazione ripetuta delle (31), rimangono senz'altro definiti (in funzione dei differenziali primi, dei simboli di CHRISTOFFEL, e loro derivate) anche differenziali superiori del tipo $d' \delta d x_i$, $\delta d' d x_i$, il simbolo d' dovendo naturalmente trattarsi alla stessa stregua di d e δ .

Non si può affermare che $d' \delta d x_i$ coincida con $\delta d' d x_i$, anzi il calcolo effettivo mostra che ciò non è. Le differenze

$$(33) \quad u^{(i)} = d' \delta d x_i - \delta d' d x_i$$

posseggono tuttavia la notevole proprietà di costituire un sistema contravariante.

Per dimostrarlo, prendiamo in considerazione un sistema covariante ausiliario p_i , costituito da n funzioni delle x (senza intervento di differenziali), e partiamoci dall'osservare che (in quanto il sistema p_i si suppone covariante)

$$\sum_i^n p_i d x_i$$

²¹⁾ l. c. ²⁾, p. 381.

²²⁾ l. c. ²⁾, p. 388.

è un invariante. Lo è quindi (per essere del pari invarianti gli operatori d' e δ) anche la differenza

$$G = d' \delta \sum_i^n p_i dx_i - \delta d' \sum_i^n p_i dx_i = d' \sum_i^n (\delta p_i dx_i + p_i \delta dx_i) - \delta \sum_i^n (d' p_i dx_i + p_i d' dx_i).$$

Sviluppando materialmente, e tenendo presente che, per le (31'),

$$d' \delta p_i = \delta d' p_i,$$

si ha

$$G = \sum_i^n p_i (d' \delta dx_i - \delta d' dx_i) = \sum_i^n p_i u^{(i)},$$

donde apparisce che anche $\sum_i^n p_i u^{(i)}$ è un invariante. Da questa invarianza e dall'arbitrarietà delle p_i (che sono funzioni delle x , vincolate soltanto a trasformarsi con legge covariante quando si eseguisce un cambiamento di variabili) segue la contravarianza del sistema $u^{(i)}$ definito dalle (33). C. D. D.

Risulta quindi invariante

$$(34) \quad I = \sum_{ik}^n a_{ik} u^{(i)} \delta' x_k,$$

rappresentando $\delta' x_k$ un arbitrario sistema di incrementi delle variabili.

Dacchè le (31) porgono

$$\begin{aligned} d' \delta dx_i &= - d' \sum_{jl}^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} dx_j \delta x_l \\ &= - \sum_{jl}^n \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\}}{\partial x_h} d' x_h dx_j \delta x_l - \sum_{jl}^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} (d' dx_j \delta x_l + dx_j d' \delta x_l), \\ \delta d' dx_i &= - \delta \sum_{jl}^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} dx_j d' x_l \\ &= - \sum_{jl}^n \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\}}{\partial x_h} \delta x_h dx_j d' x_l - \sum_{jl}^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} (\delta dx_j d' x_l + dx_j \delta d' x_l), \end{aligned}$$

per sottrazione (dopo aver scambiato h ed l nella prima sommatoria) si ricava

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= d' \delta dx_i - \delta d' dx_i \\ &= \sum_{jl}^n \left[\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\}}{\partial x_h} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} j h \\ i \end{matrix} \right\}}{\partial x_l} \right] dx_j d' x_l \delta x_h - \sum_{jl}^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} (d' dx_j \delta x_l - \delta dx_j d' x_l). \end{aligned}$$

Dalle (31) si ha ancora

$$d' dx_j = - \sum_{ht}^n \left\{ \begin{matrix} h t \\ j \end{matrix} \right\} dx_h d' x_t, \quad \delta dx_j = - \sum_{ht}^n \left\{ \begin{matrix} h t \\ j \end{matrix} \right\} dx_h \delta x_t,$$

talchè, scambiando gli indici in modo da poter raccogliere a fattor comune $dx_j d' x_i \delta x_h$,

emerge

$$- \sum_i^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} (d' d x_j \delta x_i - \delta d x_j d' x_i) = \sum_{j l h} d x_j d' x_l \delta x_h \sum_i^n \left[\left\{ \begin{matrix} t h \\ i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j l \\ t \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} t l \\ i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j h \\ t \end{matrix} \right\} \right],$$

e si ottiene infine

$$(35) \quad u^{(i)} = \sum_{j l h} d x_j d' x_l \delta x_h \{j i, l h\},$$

designandosi con

$$(36) \quad \{j i, l h\} = \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\}}{\partial x_h} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} j h \\ i \end{matrix} \right\}}{\partial x_l} + \sum_t^n \left[\left\{ \begin{matrix} j l \\ t \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t h \\ i \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} j h \\ t \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t l \\ i \end{matrix} \right\} \right]$$

i simboli di RIEMANN di 2^a specie.

Ove si passi a quelli di 1^a specie col porre

$$(37) \quad a_{j k, l h} = \sum_i^n a_{i k} \{j i, l h\},$$

la espressione (34) di I , in base alle (35), diviene

$$(34') \quad I = \sum_{j l h k} a_{j k, l h} d x_j d' x_l \delta x_h \delta' x_k$$

e mette direttamente in evidenza il carattere covariante dei simboli (37). Se non erro, è questo il modo più rapido per arrivarvi. Quanto alle proprietà dei simboli stessi, compendiabili nelle formule

$$a_{j k, l h} = - a_{j k, h l},$$

$$a_{j k, l h} = a_{l h, j k},$$

non resta che riportarsi alla trattazione ordinaria, desumendole (la prima immediatamente, la seconda con qualche trasformazione) dalle formule di definizione.

Dobbiamo invece rivolgere la nostra attenzione alla interpretazione geometrica dell'invariante I nel caso particolarmente importante in cui i differenziali indipendenti si riducono a due, coincidendo d' con d e δ' con δ .

§ 17.

Parallelogrammoidi — Base e soprabase.

Sviluppo delle coordinate dei vertici a partire dalla base.

Sia PQ un generico arco di geodetica nella nostra V_n . Dai punti P e Q immaginiamo spiccate due altre geodetiche in direzioni parallele. Esse formeranno (§ 8) con PQ uno stesso angolo ψ . Si assumano su queste geodetiche due archi eguali

$$PP' = QQ' = ds,$$

e si congiungano anche P' e Q' con un arco di geodetica. Si ottiene così un quadrante

golo geodetico che chiameremo *parallelogrammoide* designandone i due lati opposti PQ e $P'Q'$ come *base* e *soprabase*.

Indicheremo con $x_i^{(P)}$, $x_i^{(Q)}$, $x_i^{(P')}$, $x_i^{(Q')}$ le coordinate dei quattro vertici P , Q , P' , Q' ; con $\xi_p^{(i)}$, $\xi_Q^{(i)}$ i parametri di direzione delle due geodetiche parallele nei loro punti di origine; con $\left\{ \begin{smallmatrix} j l \\ i \end{smallmatrix} \right\}_P$, $\left\{ \begin{smallmatrix} j l \\ i \end{smallmatrix} \right\}_Q$ i valori dei simboli di Christoffel in questi stessi punti.

Dalle equazioni delle geodetiche, a meno di termini d'ordine superiore al secondo in ds , si ha

$$(38) \quad \begin{cases} x_i^{(P')} = x_i^{(P)} + ds \xi_p^{(i)} - \frac{1}{2} ds^2 \sum_{j,l} \left\{ \begin{smallmatrix} j l \\ i \end{smallmatrix} \right\}_P \xi_p^{(j)} \xi_p^{(l)}, \\ x_i^{(Q')} = x_i^{(Q)} + ds \xi_Q^{(i)} - \frac{1}{2} ds^2 \sum_{j,l} \left\{ \begin{smallmatrix} j l \\ i \end{smallmatrix} \right\}_Q \xi_Q^{(j)} \xi_Q^{(l)} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Designiamo con δx_i le differenze $x_i^{(Q)} - x_i^{(P)}$, e in generale con δf il divario fra le determinazioni di un qualsiasi elemento (numerico o geometrico) f , passando da P a Q . Avremo per sottrazione dalle (38)

$$x_i^{(Q')} - x_i^{(P')} = \delta x_i + ds \delta \xi^{(i)} - \frac{1}{2} ds^2 \delta \sum_{j,l} \left\{ \begin{smallmatrix} j l \\ i \end{smallmatrix} \right\} \xi^{(j)} \xi^{(l)}.$$

Siccome, per costruzione, ds non si altera nel passaggio da P a Q , così, ritenendolo infinitesimo, ponendo per brevità

$$dx_i = \xi_p^{(i)} ds,$$

e badando alla (31) per $\delta = d$, potremo anche scrivere

$$(39) \quad Dx_i = x_i^{(Q')} - x_i^{(P')} = \delta x_i + \delta dx_i + \frac{1}{2} \delta d^2 x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Di qui appare che le differenze Dx_i delle coordinate omologhe dei punti P' e Q' sono (colla convenuta approssimazione rispetto a ds) di prim'ordine rispetto alla variazione δ : val quanto dire che, indicando con δs l'arco PQ e trattandolo come un infinitesimo (indipendente da ds), le differenze Dx_i risultano anch'esse infinitesime di primo ordine (almeno) rispetto a δs . Le (39) ne forniscono pertanto una espressione che è esatta:

fino al secondo ordine rispetto a ds ;

fino al primo ordine rispetto a δs .

Dal significato dei simboli d e δ , quali figurano nella (39), scende immediatamente che, come il d^2 , anche i δd e δd^2 si esplicitano in base alla (31). Ed è appena necessario avvertire che, a calcoli eseguiti, tutte le funzioni del posto vanno riferite al punto P .

§ 18.

Lunghezza della soprabase — Curvatura.

Rappresentiamo con a'_{ik} i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare in P' . Atteso il

comportamento testè rilevato delle Dx_i , potremo riguardare

$$(40) \quad \sum_{ik}^n a'_{ik} Dx_i Dx_k$$

come espressione del quadrato della distanza $\overline{P'Q'^2}$, a meno di termini d'ordine superiore al secondo, rispetto sia a ds che a δs .

Giova riportare (colla stessa approssimazione) anche i valori a'_{ik} al punto P . All'uopo basta sviluppare lungo la geodetica PP' , trascurando i termini in ds^3 ; si ha quindi

$$(41) \quad a'_{ik} = a_{ik} + da_{ik} + \frac{1}{2} d^2 a_{ik}.$$

Un analogo trasporto si può mettere in evidenza in una generica Dx_i , aggiungendo e togliendo il termine $\frac{1}{2} d^2 \delta x_i$ (e ricordando che $\delta Dx_i = d\delta x_i$). Le (39) divengono in conformità

$$(39') \quad Dx_i = D'\delta x_i - \frac{1}{2} v^{(i)},$$

dove

$$(42) \quad D'\delta x_i = \delta x_i + d\delta x_i + \frac{1}{2} d^2 \delta x_i,$$

$$(43) \quad v^{(i)} = d\delta dx_i - \delta d^2 x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Come si vede, le $v^{(i)}$ sono di terz'ordine (secondo in ds e primo in δs). Perciò la materiale sostituzione nella (40), a meno di termini d'ordine complessivo superiore al quarto, dà

$$\overline{P'Q'^2} = \sum_{ik}^n a'_{ik} D'\delta x_i D'\delta x_k - \sum_{ik}^n a'_{ik} v^{(i)} D'\delta x_k.$$

In base alle (41), (42), e colla stessa approssimazione, il primo sommatorio può essere posto sotto la forma

$$\delta s^2 + d\delta s^2 + \frac{1}{2} d^2 \delta s^2,$$

dove

$$\delta s^2 = \overline{PQ^2} = \sum_{ik}^n a_{ik} \delta x_i \delta x_k;$$

e il secondo sommatorio può essere ridotto a

$$J = \sum_{ik}^n a_{ik} v^{(i)} \delta x_k.$$

Ora, in virtù della (33), $d\delta s^2$ si annulla identicamente; lo stesso avviene quindi di $d^2 \delta s^2$. Rimane in conformità

$$(44) \quad \overline{P'Q'^2} = \overline{PQ^2} - J,$$

ma resta da attribuire ad J la sua espressione definitiva. Questa risulta dalla circostanza che, a norma delle (43), J si può considerare come un caso particolare dell'invariante I definito dalla (34): basta assumervi d' coincidente con d e δ' con δ . Si ha perciò

dalla (34')

$$(45) \quad J = \sum_{j, l, h}^n a_{jk, lh} dx_j dx_l \delta x_h \delta x_k.$$

Siamo ormai in grado di fornire una caratterizzazione intrinseca della curvatura sotto la forma geometrica seguente:

Costruito in V_n un parallelogrammoide infinitesimo $PQP'Q'$, si faccia il rapporto

$$(46) \quad K = \frac{\overline{PQ}^2 - \overline{P'Q'}^2}{(ds \delta s \sin \psi)^2}$$

fra la differenza dei quadrati della base e della soprabase e il quadrato dell'area del parallelogrammoide ²³⁾. Questo rapporto, cioè, in virtù della (44),

$$(47) \quad K = \frac{J}{(ds \delta s \sin \psi)^2}$$

costituisce la curvatura riemanniana di V_n in P secondo la giacitura del parallelogrammoide. La coincidenza colla espressione ordinaria ²⁴⁾ scende dalla (45).

Una volta riconosciuto che K dipende soltanto dal punto P e dalla giacitura, si ha dalla (46) il corollario seguente: Tutti i parallelogrammoidi equivalenti che insistono sulla stessa base (e appartengono alla stessa giacitura) hanno soprabasi di eguale lunghezza.

Vorrei ancora rilevare, dal punto di vista sistematico, che il procedimento ora svolto, oltre a stabilire una nuova proprietà della curvatura riemanniana, presenta sulla trattazione ordinaria il vantaggio di evitare qualche sviluppo formale. Di solito infatti si definisce, in uno dei modi segnalati da GAUSS, la curvatura delle V_2 ; e si passa alle V_n , facendo intervenire le V_2 costituite dalle geodetiche di una stessa giacitura. Si richiede quindi un discreto calcolo per riconoscere che la curvatura riemanniana di queste V_2 è data dalla (47).

Se invece si adotta per K la definizione geometrica (46), da un lato riesce più espressiva la traduzione analitica che porta alla (47); e dall'altro, valendo naturalmente la medesima definizione anche per $n = 2$, appare manifesto che la curvatura di V_n desunta da un generico parallelogrammoide coincide con quella di qualsivoglia V_2 , la quale (al limite) contenga lo stesso parallelogrammoide.

NOTA CRITICA.

Già rilevammo nel § 15 che le espressioni (31)

$$d \delta x_i + \sum_{j, l}^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} dx_j \delta x_l = 0$$

²³⁾ Più precisamente, di qualunque pezzo di superficie a due dimensioni avente il parallelogrammoide per contorno e tendente a zero con esso.

²⁴⁾ L. BIANCHI, loc. cit. ¹⁾, pp. 341-342.

dei differenziali di 2° ordine non differiscono da quelle cui si perviene esplicitando la comprensiva definizione di RIEMANN.

Dallo stesso § risulta altresì che, con queste espressioni dei differenziali secondi, si ha identicamente (lemma di RICCI):

$$(48) \quad \delta ds^2 = d\delta s^2 = d\Phi = \delta\Phi = 0,$$

dove

$$\Phi = \sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i \delta x_k,$$

e ds^2 , δs^2 stanno, ben si intende, per

$$\sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i dx_k \quad \text{e} \quad \sum_{i,k}^n a_{ik} \delta x_i \delta x_k,$$

rispettivamente.

In questa condizione di cose non sembra ambiguo il significato da attribuire al trinomio considerato da RIEMANN:

$$R = \delta^2 ds^2 - 2 d\delta\Phi + d^2 \delta s^2,$$

e un tale significato, in virtù della (48), implica necessariamente $R = 0$.

RIEMANN afferma invece ²⁵⁾: « Haec expressio [cioè R] invenietur $= J$ » [avendo J il valore (45)]. WEBER, nei suoi chiarimenti, si diffonde sul modo di introdurre i differenziali secondi ²⁶⁾, ma, dopo averne ricavata l'espressione esplicita, dice semplicemente ²⁷⁾: « woraus man leicht den Ausdruck erhält $R = J$ ».

Probabilmente, nella R di RIEMANN, c'è soltanto un qualche vizio di scrittura, che ne vela il concetto. Mi lusingo di aver sostanzialmente ricostruito tale concetto, ma non potei aggiustare il simbolo. Se la cosa è fattibile, sarà bene rendere, anche su questo particolare, piena giustizia al genio di RIEMANN.

Terminerò con una osservazione circa il calcolo della curvatura con riferimento a speciali variabili, che è indicato da RIEMANN ²⁸⁾ e sviluppato da WEBER ²⁹⁾. Ecco intanto di che si tratta.

Si scelgano coordinate x_1, x_2, \dots, x_n tali che, in un determinato punto P , si annullino tutti i simboli $\left\{ \begin{smallmatrix} j l \\ i \end{smallmatrix} \right\}$ (cosa sempre possibile, come è ben messo in evidenza da WEBER). Si considerino due sistemi indipendenti di differenziali $dx_i, \delta x_i$, risguardando

²⁵⁾ l. c. ²⁾, p. 381.

²⁶⁾ Aggiungendo, senza alcuna giustificazione, le condizioni supplementari

$$d^2 \delta s^2 = \delta^2 ds^2 = -2 d\delta\Phi.$$

In virtù delle (48) (e semprechè si debbano leggere le formule come effettivamente sono scritte), va tutto a zero.

²⁷⁾ l. c. ²⁾, p. 388.

²⁸⁾ l. c. ²⁾, p. 261.

²⁹⁾ l. c. ²⁾, pp. 384-387.

nulli tutti i differenziali secondi $d^2 x_i$, $d\delta x_i$, $\delta d x_i$, $\delta^2 x_i$. Dicansi P' e Q i punti di coordinate $x_i + d x_i$, $x_i + \delta x_i$; a'_{hk} i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare in P' . Posto in particolare

$$(\delta s^2)_{P'} = \sum_{h,k}^n a'_{hk} \delta x_h \delta x_k,$$

si applichi alle a' lo sviluppo di TAYLOR rispetto agli incrementi d , fino al secondo ordine incluso. Con tale approssimazione si ha

$$(\delta s^2)_{P'} = \delta s^2 + \frac{1}{2} \sum_{h,k,j,l}^n \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_j \partial x_l} d x_j d x_l \delta x_h \delta x_k,$$

il δs^2 e le derivate seconde riferendosi, ben si intende, a P . Come mostra WEBER, per il modo con cui sono state fissate le variabili, intercedono speciali relazioni fra i valori delle derivate seconde delle a_{hk} in P . Tenendone conto, con qualche trasformazione, si trova

$$(\delta s^2)_{P'} = \delta s^2 + \frac{1}{3} \sum_{h,k,j,l}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 a_{jl}}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial a_{hj}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_h \partial x_j} \right] d x_j d x_l \delta x_h \delta x_k.$$

Il sommatorio si può riguardare come l'espressione, che, in base alla formola (45), assume $-I$, quando si adottano le variabili x particolarizzate come sopra si è detto.

Perciò, badando alla (47), ricaviamo

$$(49) \quad \frac{(\delta s^2)_{P'} - \delta s^2}{(d s \delta s \sin \psi)^2} = - \frac{1}{3} K,$$

che RIEMANN, nel passo citato, enuncia a parole (moltiplicando ambo i membri per 4, onde mettere in evidenza nel denominatore l'area del triangolo $PP'Q$).

Vengo finalmente alla mia osservazione.

Detto Q^* l'estremo dell'elemento lineare $(\delta s)_{P'}$ (corrispondente agli incrementi δx_i), la (49) si scrive

$$(49') \quad \frac{\overline{P'Q^{*2}} - \overline{PQ^2}}{(d s \delta s \sin \psi)^2} = - \frac{1}{3} K;$$

mentre la (46) (cambiata di segno) porge

$$(46') \quad \frac{\overline{P'Q'^2} - \overline{PQ^2}}{(d s \delta s \sin \psi)^2} = - K.$$

I secondi membri stanno, come si vede, nel rapporto di 1 a 3. La non coincidenza è manifestamente dovuta al fatto che il punto Q' (quarto vertice del parallelogrammoide), cui si perviene col procedimento invariante, è ben distinto dal punto Q^* di RIEMANN, definito analiticamente con riferimento a speciali variabili.

Per localizzare il divario sulle formule, giova riferire (come è naturalmente permesso dato il carattere invariante) anche il nostro procedimento alle speciali variabili

di RIEMANN. Le (31) danno allora, in quanto si riferiscono al punto P ,

$$d^2 x_i = d \delta x_i = \delta d x_i = \delta^2 x_i = 0;$$

ma non ne segue che debbano annullarsi nello stesso punto anche i differenziali superiori, come $\delta d^2 x_i$, $d^2 \delta x_i$, ecc. Il calcolo di RIEMANN è invece basato sull'ipotesi che si annullino tutti i differenziali d'ordine superiore al primo: ipotesi anch'essa legittima, ma non dotata di carattere invariantivo (di fronte ai cambiamenti di variabili). Non deve dunque sorprendere che i risultati sieno diversi; si rileverà piuttosto la fortuita analogia delle formule (49') e (46'), i cui secondi membri differiscono soltanto per un fattore numerico.

Padova, novembre 1916.

TULLIO LEVI-CIVITA.

INDICE

	PAGINE
Introduzione	173
§ 1. Preliminari	175
§ 2. Direzioni parallele in V_n lungo una curva prefissata C	177
§ 3. Forma intrinseca delle condizioni di parallelismo	178
§ 4. Confronto col comportamento euclideo — Sua proprietà caratteristica nei riguardi del parallelismo.	179
§ 5. Altra forma delle equazioni (I_a) — Dipendenza da una sola funzione	180
§ 6. Integrale quadratico — Conservazione degli angoli — Composizione di soluzioni ortogonali.	182
§ 7. Geodetiche — Loro proprietà caratteristica nei riguardi della direzione	183
§ 8. Inclinazione sulla curva di trasporto	184
§ 9. Caso delle ordinarie superficie	184
§ 10. Spazi a curvatura costante — Osservazione sul parallelismo di CLIFFORD	186
§ 11. Riduzione delle equazioni di parallelismo al tipo emisimmetrico	187
§ 12. Spazi a tre dimensioni.	191
§ 13. Legame delle p_{hk} coi coefficienti di rotazione di RICCI	192
§ 14. Varietà con una congruenza di curve parallele rispetto a qualsivoglia trasversale	193
§ 15. Differenziali di secondo ordine — Determinazioni invariantive — Lemma di RICCI.	195
§ 16. Differenziali d'ordine superiore — Invariante che compendia i simboli di RIEMANN, fornendone nel modo più diretto l'espressione esplicita	196
§ 17. Parallelogrammoidi — Base e soprabase — Sviluppo delle coordinate dei vertici a partire dalla base.	198
§ 18. Lunghezza della soprabase — Curvatura.	199
Nota critica.	201

SOPRA UNA RELAZIONE FRA LA TEORIA DELLA COMPOSIZIONE DI PRIMA SPECIE E LO STUDIO DELLE SERIE DIVERGENTI.

Nota di **Pia Nalli** (Palermo).

Adunanza dell'11 febbraio 1917.

Il Prof. VOLTERRA, nelle sue *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris, Gauthier-Villars, 1913) dopo avere sviluppata un'analisi delle funzioni permutabili, nel Capitolo X, chiude il Capitolo con le seguenti osservazioni:

« Terminons par une remarque qui met en évidence un lien intéressant entre ces considérations et une autre théorie de l'analyse. Si l'on prend pour fonction $F(x, y)$ l'unité, on a

$$F = 1, \quad F_2 = \frac{y-x}{1}, \quad F_3 = \frac{(y-x)^2}{1 \cdot 2}, \quad \dots {}^1).$$

Par suite, si la série

$$a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

a un certain rayon de convergence, la série

$$a_1 z + a_2 z^2 \frac{y-x}{1} + \dots + a_n z^n \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

aura un rayon de convergence infini. On retrouve ainsi le théorème fondamental qui a servi à M. BOREL dans ses recherches, maintenant classiques, sur les séries divergentes et sur l'étude des séries en dehors de leur cercle de convergence ».

Lo scopo del presente lavoro è di far vedere che il legame notato dal Prof. VOLTERRA è forse molto più profondo di quanto possono far pensare le parole che ho qui riportato. Il lavoro non contiene una teoria generale; i risultati fondamentali di esso sono espressi dalle formule (31) e (49), nelle quali è

$$G_n(x, y) = \frac{F_n(x, y)}{y^{2n-3}}$$

¹⁾ Con $F_n(x, y)$ denotiamo la *potenza n-esima di composizione* di una funzione $F(x, y)$, cfr. V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris, Gauthier-Villars, 1913) pp. 133-136.

con

$$F(x, y) = ax + by,$$

per valori convenienti delle costanti a e b , ed

$$R_n(x, y) = \frac{F_n(x, y)}{y}$$

con $F(x, y) = y$; in entrambe le formule è

$$N(x, y) = F(x, y) - F_2(x, y) + F_3(x, y) - \dots$$

[cioè $N(x, y)$ è il nucleo risolvente dell'equazione integrale (4)].

Tali formule permetterebbero forse di stabilire una teoria analoga a quella del BOREL, nella quale esse sono sostituite dalla relazione

$$\int_0^\infty e^{-u} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} du = 1,$$

che si può scrivere

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y e^{-u} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} du = 1,$$

o anche

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y N(x, y) F_n(x, y) dx = 1,$$

dove $N(x, y) = e^{-(y-x)}$ ha la stessa forma dei casi precedenti, con $F(x, y) = 1$, ed $F_n(x, y)$ si riferisce a quest'ultima funzione.

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y'' + \alpha x y' + \beta y = 0,$$

dove α e β sono due costanti positive.

Dimostreremo che se $y(x)$ è un integrale della (1) ed m è un numero positivo minore di $\frac{\beta}{\alpha}$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^m y(x) = 0.$$

Cominciamo col dimostrare che si possono trovare due integrali della (1) linearmente indipendenti che siano positivi per x sufficientemente grande.

Trasformiamo la (1) ponendo $y = \zeta e^{-\frac{\alpha}{4}x^2}$; si ha l'equazione in ζ

$$(2) \quad \zeta'' = \zeta \left(\frac{\alpha^2}{4} x^2 + \frac{\alpha}{2} - \beta \right).$$

Per x sufficientemente grande ($x > b$) ζ e ζ'' hanno lo stesso segno, quindi la curva $\zeta = \zeta(x)$, a partire dal punto indicato, volge sempre la sua convessità verso l'asse delle x . Consideriamo un integrale della (2) che per $x = k > b$ prende valore positivo, mentre la derivata prima prende valore negativo. Per $x \geq k$ la curva $\zeta = \zeta(x)$ volge la sua convessità verso l'asse delle x . Se ζ' non si annulla per $x > k$, sarà sempre

negativa, quindi χ sarà decrescente e per $x = \infty$ tenderà ad un limite finito od a $-\infty$, e perciò l'integrale considerato, o quello che si ottiene da esso con un cambiamento di segno, sarà positivo per x sufficientemente grande.

Se poi χ' si annulla, due casi possono darsi: χ' si annulla in un punto x_0 tale che nei punti interni a (k, x_0) χ e χ' non si annullano, o χ e χ' non si annullano nei punti interni ad un intervallo (k, x_0) mentre χ si annulla in x_0 .

Nel primo caso, in x_0 , χ non si annulla e sarà quindi positiva, χ'' sarà pure positiva, in x_0 χ avrà un minimo, e non potendo avere per $x > x_0$ un massimo positivo, come risulta dalla (2), sarà crescente per $x > x_0$, e perciò χ sarà positiva in (k, ∞) .

Nel secondo caso χ' sarà negativa in x_0 e perciò a destra di x_0 χ sarà decrescente e quindi negativa. Se χ fosse positiva in un punto $x_1 > x_0$, in (x_0, x_1) avrebbe un minimo negativo, ciò che è in contraddizione con la (2), quindi χ è negativa per $x > x_0$, e $-\chi$ è un integrale della (2) positivo per $x > x_0$.

Possiamo quindi trovare due integrali della (2) linearmente indipendenti che siano positivi per x sufficientemente grande, ed in corrispondenza avremo due integrali della (1) che soddisfano alle stesse condizioni.

Ciò posto, sia m un numero positivo minore di $\frac{\beta}{\alpha}$ e poniamo $v = x^m y$; v soddisfa alla seguente equazione differenziale

$$(3) \quad v'' + (\alpha - 2mx^{-2})xv' + [\beta - \alpha m + m(m+1)x^{-2}]v = 0.$$

Sia v un integrale della (3) positivo per x sufficientemente grande, e si determini h in modo che per $x \geq h$ sia

$$v(x) > 0; \quad \alpha - 2mx^{-2} > 0; \quad \beta - \alpha m + m(m+1)x^{-2} > 0.$$

Esisterà certamente un punto $x_0 > h$ dove v' sarà negativa.

Infatti, se fosse $v'(x) > 0$ per qualunque $x > h$, per tutti questi valori di x si avrebbe $v''(x) < 0$, quindi v' sarebbe decrescente e per $x = \infty$ tenderebbe ad un limite finito, positivo o nullo, v sarebbe crescente e tenderebbe ad un limite finito e positivo od a $+\infty$, v'' , per la (3), si manterrebbe dunque inferiore ad una quantità negativa fissa, e non potrebbe v' tendere ad un limite finito.

Esisterà dunque un punto $x_0 > h$ dove v' sarà negativa.

Posto allora $v = e^u$, u soddisfa alla seguente equazione

$$u'' + u'^2 + (\alpha - 2mx^{-2})xu' + \beta - \alpha m + m(m+1)x^{-2} = 0.$$

In x_0 u' sarà negativa; se fosse positiva in qualche punto a destra di x_0 ci sarebbe un punto $x' > x_0$ tale che in (x_0, x') u' sarebbe negativa o nulla, ed in qualche punto di $(x', x' + \epsilon)$, qualunque sia $\epsilon > 0$, sarebbe positiva. Sarebbe quindi $u'(x') = 0$ e perciò $u''(x') < 0$, e non potrebbe $u'(x)$ essere positiva a destra di x' .

Dunque u' è negativa qualunque sia $x > x_0$ e tale è perciò v' ; v è decrescente per $x > x_0$, e per $x = \infty$ tende ad un limite non negativo che non può essere altro che zero, perchè m è un numero qualunque minore di $\frac{\beta}{\alpha}$. Resta così dimostrato quanto si è asserito al principio di questo n°.

2. Si consideri l'equazione integrale di VOLTERRA

$$(4) \quad f(y) = \varphi(y) + \int_0^y F(x, y) \varphi(x) dx$$

nella funzione incognita $\varphi(x)$, essendo

$$F(x, y) = ax + by,$$

con a e b costanti. In questo n° daremo la forma del nucleo risolvete della (4) ossia della funzione $N(x, y)$ per la quale si ha

$$(5) \quad \varphi(y) = f(y) - \int_0^y N(x, y) f(x) dx \text{ } ^2).$$

Nell'ipotesi che la $f(y)$ ammetta derivate di primo e di secondo ordine, la (4) ci dà, con due derivazioni,

$$(6) \quad f''(x) = \varphi''(x) + (a + b)x\varphi'(x) + (a + 2b)\varphi(x).$$

Siano $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea

$$(7) \quad \varphi'' + (a + b)x\varphi' + (a + 2b)\varphi = 0;$$

l'integrale generale della (6) si può mettere sotto la seguente forma

$$\varphi(x) = \alpha(x)\varphi_1(x) + \beta(x)\varphi_2(x),$$

dove è

$$(8) \quad \alpha(x) = \int_0^x f''(\xi)g(\xi)d\xi + c_1, \quad \beta(x) = \int_0^x f''(\xi)h(\xi)d\xi + c_2,$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie e

$$g(x) = \frac{-\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_2(x)\varphi_1'(x)}, \quad h(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_2(x)\varphi_1'(x)}.$$

Dalle (8), con integrazioni per parti, si ottiene

$$\alpha(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + \int_0^x f(\xi)g''(\xi)d\xi + c_1$$

$$\beta(x) = f'(x)h(x) - f(x)h'(x) + \int_0^x f(\xi)h''(\xi)d\xi + c_2,$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Tenendo conto delle relazioni

$$g(x)\varphi_1(x) + h(x)\varphi_2(x) = 0,$$

$$g'(x)\varphi_1(x) + h'(x)\varphi_2(x) = -1,$$

²⁾ l. c. ¹⁾ pp. 62-69.

possiamo dire che la funzione $\varphi(x)$ soddisfacente alla (4) è la seguente

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(\xi)[g''(\xi)\varphi_1(x) + h''(\xi)\varphi_2(x)]d\xi + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x),$$

per due valori convenienti di c_1 e c_2 . Ma si vede subito che deve essere $c_1 = c_2 = 0$, e perciò si avrà

$$(9) \quad N(x, y) = -[\varphi_1(y)g''(x) + \varphi_2(y)h''(x)].$$

Posto $\varphi_1(0) = a_{11}$, $\varphi_2(0) = a_{12}$, $\varphi_1'(0) = a_{21}$, $\varphi_2'(0) = a_{22}$, si potrà supporre che sia $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$, e sarà quindi

$$\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_2(x)\varphi_1'(x) = e^{-\frac{a+b}{2}x^2}.$$

Si avrà dunque

$$g''(x) = e^{\frac{a+b}{2}x^2} p(x), \quad h''(x) = e^{\frac{a+b}{2}x^2} q(x),$$

con

$$(10) \quad \begin{cases} p(x) = \varphi_2(x)[b - (a+b)^2x^2] - (a+b)x\varphi_2'(x), \\ q(x) = -\varphi_1(x)[b - (a+b)^2x^2] + (a+b)x\varphi_1'(x). \end{cases}$$

Si potrà dunque scrivere

$$(11) \quad N(x, y) = -e^{\frac{a+b}{2}x^2} [\varphi_1(y)p(x) + \varphi_2(y)q(x)]$$

3. Denotiamo con $F_n(x, y)$ la potenza n^{esima} di composizione di $F(x, y)$, ossia la funzione definita per mezzo delle relazioni

$$F_1(x, y) = F(x, y),$$

$$F_n(x, y) = \int_x^y F_{n-1}(x, \xi)F(\xi, y)d\xi = \int_x^y F(x, \xi)F_{n-1}(\xi, y)d\xi \quad (n \geq 2).$$

Posto

$$(12) \quad G_n(x, y) = \frac{F_n(x, y)}{y^{2n-3}}$$

per $n \geq 2$, e

$$G_1(x, y) = \frac{F_1(x, y)}{y},$$

dimostriamo che l'espressione

$$(13) \quad \int_0^y N(x, y)G_n(x, y)dx,$$

quando si suppone

$$(14) \quad a + b > 0, \quad a + 2b > 0, \quad \frac{a + 2b}{a + b} > 2,$$

tende ad un limite quando y tende ad ∞ .

Perchè siano soddisfatte le (14) è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le ineguaglianze

$$a < 0, \quad a + b > 0.$$

Cominciamo col considerare la (13) per $n = 1$. Si ha

$$\int_0^y N(x, y) G_1(x, y) dx \\ = -\frac{1}{y} \left(\varphi_1(y) \int_0^y g''(x)(ax + by) dx + \varphi_2(y) \int_0^y h''(x)(ax + by) dx \right).$$

Essendo intanto

$$\int_0^x g''(x)(ax + by) dx = (a + b)y g'(y) - by g'(0) - ag(y) + ag(0),$$

esprimendo nel secondo membro $g(y)$ per mezzo di $\varphi_2(y)$ si trova

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^y g''(x)(ax + by) dx \\ = e^{\frac{a+b}{2}y^2} [a\varphi_2(y) - (a+b)y\varphi_2'(y) - (a+b)^2y^2\varphi_2(y)] + ba_{22}y - aa_{12}. \end{array} \right.$$

Analogamente si trova

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^y h''(x)(ax + by) dx \\ = e^{\frac{a+b}{2}y^2} [-a\varphi_1(y) + (a+b)y\varphi_1'(y) + (a+b)^2y^2\varphi_1(y)] - ba_{21}y + aa_{11}. \end{array} \right.$$

Tenendo conto di queste relazioni si ricava

$$\begin{aligned} \int_0^y N(x, y) G_1(x, y) dx &= \frac{1}{y} \{ y(a+b)e^{\frac{a+b}{2}y^2} [\varphi_1(y)\varphi_2'(y) - \varphi_2(y)\varphi_1'(y)] - \\ &\quad - \varphi_1(y)(ba_{22}y - a_{12}a) + \varphi_2(y)(ba_{21}y - a_{11}a) \} \\ &= a + b - \frac{1}{y} [\varphi_1(y)(ba_{22}y - a_{12}a) - \varphi_2(y)(ba_{21}y - a_{11}a)]. \end{aligned}$$

Siccome $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$ tendono a zero quando y tende ad ∞ , sarà

$$(17) \quad \lim_{y=\infty} \int_0^y N(x, y) G_1(x, y) dx = a + b.$$

Consideriamo ora la (13) per $n \geq 2$.

Essendo

$$F_n(x, y) = \int_x^y F(x, \xi) F_{n-1}(\xi, y) d\xi,$$

si avrà

$$\begin{aligned} \int_0^y N(x, y) F_n(x, y) dx &= \int_0^y N(x, y) dx \int_x^y F(x, \xi) F_{n-1}(\xi, y) d\xi \\ &= \int_0^y F_{n-1}(\xi, y) d\xi \int_0^\xi N(x, y) F(x, \xi) dx. \end{aligned}$$

Essendo poi

$$-\int_0^\xi N(x, y) F(x, \xi) dx = \varphi_1(y) \int_0^\xi g''(x)(ax + b\xi) d\xi + \varphi_2(y) \int_0^\xi h''(x)(ax + b\xi) dx,$$

si avrà, tenendo conto delle (15) e (16),

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{\xi} N(x, y) F(x, \xi) dx \\
 & = \varphi_1(y) \left\{ e^{\frac{a+b}{2}\xi^2} [a\varphi_2(\xi) - (a+b)\xi\varphi_2'(\xi) - (a+b)^2\xi^2\varphi_2(\xi)] + ba_{22}\xi - aa_{12} \right\} \\
 & + \varphi_2(y) \left\{ e^{\frac{a+b}{2}\xi^2} [-a\varphi_1(\xi) + (a+b)\xi\varphi_1'(\xi) + (a+b)^2\xi^2\varphi_1(\xi)] - ba_{21}\xi + aa_{11} \right\} = -R(\xi, y).
 \end{aligned}$$

L'espressione di $R(\xi, y)$ si trasforma facilmente, tenendo conto delle (10) e (11), nel seguente modo

$$(18) \quad R(\xi, y) = N(\xi, y) + P(\xi, y),$$

con

$$(19) \quad \begin{cases} P(\xi, y) = (b-a)e^{\frac{a+b}{2}\xi^2} [\varphi_1(y)\varphi_2(\xi) - \varphi_2(y)\varphi_1(\xi)] \\ + \varphi_2(y)(ba_{21}\xi - aa_{11}) - \varphi_1(y)(ba_{22}\xi - aa_{12}). \end{cases}$$

Avremo così finalmente

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^y N(x, y) G_n(x, y) dx \\ & = \frac{1}{y^2} \int_0^y N(x, y) G_{n-1}(x, y) dx + \frac{1}{y^2} \int_0^y P(x, y) G_{n-1}(x, y) dx, \end{aligned} \right.$$

per $n \geq 3$, e

$$(21) \quad \int_0^y N(x, y) G_2(x, y) dx = \int_0^y N(x, y) G_1(x, y) dx + \int_0^y P(x, y) G_1(x, y) dx.$$

Possiamo dunque dire che per $n \geq 3$ esisterà il limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$\int_0^y N(x, y) G_n(x, y) dx$$

se per $y = \infty$ esistono i limiti delle espressioni

$$\int_0^y N(x, y) G_{n-1}(x, y) dx \quad \text{e} \quad \frac{1}{y^2} \int_0^y P(x, y) G_{n-1}(x, y) dx.$$

Per $n = 2$, avendo già dimostrata la (17), ci resta da dimostrare l'esistenza del limite per $y = \infty$ dell'espressione

$$\int_0^y P(x, y) G_1(x, y) dx.$$

Poniamo, per semplicità,

$$c_1 = \frac{a+b}{2}, \quad c_2 = a+2b.$$

Se $\varphi(x)$ è un integrale qualunque della (7) si trovano facilmente le relazioni

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^y e^{c_1 x^2} \varphi(x) dx = -\frac{1}{c_2} [e^{c_1 y^2} \varphi'(y) - \varphi'(0)], \\ & \int_0^y e^{c_1 x^2} x \varphi(x) dx = \frac{1}{c_2 + 2c_1} [e^{c_1 y^2} \varphi(y) - e^{c_1 y^2} y \varphi'(y) - \varphi(0)]. \end{aligned} \right.$$

Per mezzo di queste si ottiene

$$= - \left(\frac{a}{c_2 + 2c_1} + \frac{b}{c_2} \right) e^{c_1 y^2} y \varphi'(y) + \frac{a}{c_2 + 2c_1} e^{c_1 y^2} \varphi(y) + \frac{b \varphi'(0)}{c_2} y - \frac{a \varphi(0)}{c_2 + 2c_1}.$$

Ponendo dunque

$$(23) \quad P_1(x, y) = (b - a) e^{c_1 x^2} [\varphi_1(y) \varphi_2(x) - \varphi_2(y) \varphi_1(x)],$$

$$(24) \quad P_2(x, y) = \varphi_2(y) (b a_{21} x - a a_{11}) - \varphi_1(y) (b a_{22} x - a a_{12}),$$

dimodochè sarà

$$P(x, y) = P_1(x, y) + P_2(x, y),$$

avremo

$$\begin{aligned} & \int_0^y P_1(x, y) G_1(x, y) dx \\ &= \frac{b-a}{y} \left\{ \varphi_1(y) \left[- \left(\frac{a}{c_2 + 2c_1} + \frac{b}{c_2} \right) e^{c_1 y^2} y \varphi_2'(y) + \frac{a}{c_2 + 2c_1} e^{c_1 y^2} \varphi_2(y) + \frac{b a_{22}}{c_2} y - \frac{a a_{12}}{c_2 + 2c_1} \right] - \right. \\ & \quad \left. - \varphi_2(y) \left[- \left(\frac{a}{c_2 + 2c_1} + \frac{b}{c_2} \right) e^{c_1 y^2} y \varphi_1'(y) + \frac{a}{c_2 + 2c_1} e^{c_1 y^2} \varphi_1(y) + \frac{b a_{21}}{c_2} y - \frac{a a_{11}}{c_2 + 2c_1} \right] \right\} \\ &= (b-a) \left(\frac{a}{c_2 + 2c_1} + \frac{b}{c_2} \right) \\ & \quad + (b-a) \frac{b}{c_2} [a_{22} \varphi_1(y) - a_{21} \varphi_2(y)] - \frac{b-a}{y} \frac{a}{c_2 + 2c_1} [a_{12} \varphi_1(y) - a_{11} \varphi_2(y)]. \end{aligned}$$

Sarà dunque

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y P_1(x, y) G_1(x, y) dx \\ &= - (b-a) \left(\frac{a}{c_2 + 2c_1} + \frac{b}{c_2} \right) = - (b-a)(a+b) \frac{a+3b}{(a+2b)(2a+3b)}. \end{aligned}$$

Si noti poi che l'integrale:

$$\int_0^y P_2(x, y) G_1(x, y) dx$$

si può mettere sotto la forma

$$\varphi_1(y) \frac{h_1(y)}{y} + \varphi_2(y) \frac{h_2(y)}{y},$$

dove $h_1(y)$ ed $h_2(y)$ sono polinomi di terzo grado in y . Avendo supposto $\frac{a+2b}{a+b} > 2$, il prodotto di un integrale qualunque $\varphi(y)$ della (7) per y^2 tende a zero quando y tende ad ∞ , e perciò

$$\int_0^y P_2(x, y) G_1(x, y) dx$$

tende a zero quando y tende ad ∞ . Si avrà dunque finalmente

$$(25) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y N(x, y) G_2(x, y) dx = (a+b) \left[1 - (b-a) \frac{a+3b}{(a+2b)(2a+3b)} \right].$$

4. Passiamo ora a considerare la (13) quando n è un intero maggiore di 2.

Osserviamo anzitutto che se $\varphi(x)$ è un integrale qualunque della (7) ed m un intero positivo o nullo, e poniamo

$$(26) \quad I_m(y) = \int_0^y e^{c_1 x^2} x^m \varphi(x) dx,$$

sarà

$$I_m(y) = -\frac{1}{c_2} \int_0^y e^{c_1 x^2} x^m [\varphi''(x) + 2c_1 x \varphi'(x)] dx,$$

e da questa, per $m \geq 2$, si trova con facili trasformazioni

$$I_m(y) = -\frac{1}{c_2} [e^{c_1 y^2} y^m \varphi'(y) - m e^{c_1 y^2} y^{m-1} \varphi(y) + 2m c_1 I_m(y) + m(m-1) I_{m-2}(y)].$$

Di qui si trae

$$I_m(y) = -\frac{1}{c_2 + 2m c_1} \{e^{c_1 y^2} [y^m \varphi'(y) - m y^{m-1} \varphi(y)] + m(m-1) I_{m-2}(y)\}.$$

Questa formola di ricorrenza, insieme alle (22), permette di stabilire la seguente eguaglianza

$$I_m(y) = e^{c_1 y^2} [\varphi'(y) P_m(y) + \varphi(y) Q_{m-1}(y)] + c_m.$$

dove $P_m(y)$ e $Q_{m-1}(y)$ sono due polinomi in y , rispettivamente dei gradi m ed $m-1$, in ciascuno dei quali compariscono potenze di y i cui esponenti hanno tutti la stessa parità, c_m è una costante che, oltre che da m , dipende da a , da b e da $\varphi(0)$ o da $\varphi'(0)$,

secondochè m è dispari o pari. Il coefficiente di y^m in $P_m(y)$ è $-\frac{1}{c_2 + 2m c_1}$.

Osserviamo ancora che, denotando con $F_n(x, y)$ la potenza n^{esima} di composizione di $F(x, y) = ax + by$, questa è un polinomio omogeneo di grado $2n-1$ in x ed ed y , cioè

$$(27) \quad F_n(x, y) = \sum_{r=0}^{2n-1} \alpha_r^{(n)} x^{2n-1-r} y^r.$$

Si avrà dunque, ricordando la definizione di $P_1(x, y)$ data dalla (23),

$$\int_0^y P_1(x, y) F_n(x, y) dx = (b-a) \left[\varphi_1(y) \int_0^y e^{c_1 x^2} \varphi_2(x) F_n(x, y) dx - \varphi_2(y) \int_0^y e^{c_1 x^2} \varphi_1(x) F_n(x, y) dx \right].$$

Si ha intanto

$$\int_0^y e^{c_1 x^2} \varphi_2(x) F_n(x, y) dx = \sum_{r=0}^{2n-1} \alpha_{2n-1-r}^{(n)} y^{2n-1-r} I_r^{(2)}(y),$$

dove $I_r^{(2)}(y)$ è cioè che diventa il secondo membro della (26) quando in esso si mette $\varphi_2(y)$ al posto di $\varphi(y)$.

Si avrà dunque

$$\int_0^y e^{c_1 x^2} \varphi_2(x) F_n(x, y) dx = \sum_{r=0}^{2n-1} \alpha_{2n-1-r}^{(n)} y^{2n-1-r} \{e^{c_1 y^2} [\varphi_2'(y) P_r(y) + \varphi_2(y) Q_{r-1}(y)] + c_{r,2}\},$$

dove con $c_{m,2}$ denotiamo ciò che diventa la c_m della (26) quando in essa si ponga $\varphi_2(y)$ al posto di $\varphi(y)$.

Analogamente si trova

$$\int_0^y c_{r,2}^{c_1 x^2} \varphi_1(x) F_n(x, y) dx = \sum_{r=0}^{2n-1} \alpha_{2n-1-r}^{(n)} y^{2n-1-r} \{e^{c_1 y^2} [\varphi_1'(y) P_r(y) + \varphi_1(y) Q_{r-1}(y)] + c_{r,1}\},$$

dove $c_{r,1}$ è definita per mezzo di $\varphi_1(y)$ come $c_{r,2}$ lo è per mezzo di $\varphi_2(y)$.

Possiamo dunque scrivere

$$\int_0^y e^{c_1 x^2} \varphi_2(x) F_n(x, y) dx = e^{c_1 y^2} [\varphi_2'(y) S_{2n-1}(y) + \varphi_2(y) T_{2n-2}(y)] + V_{2n-1}^{(2)}(y),$$

$$\int_0^y e^{c_1 x^2} \varphi_1(x) F_n(x, y) dx = e^{c_1 y^2} [\varphi_1'(y) S_{2n-1}(y) + \varphi_1(y) T_{2n-2}(y)] + V_{2n-1}^{(1)}(y),$$

dove $S_{2n-1}(y)$, $V_{2n-1}^{(1)}(y)$, $V_{2n-1}^{(2)}(y)$, $T_{2n-2}(y)$ sono polinomi in y , i primi tre di grado $2n-1$ e l'ultimo di grado $2n-2$.

Il coefficiente del termine di più alto grado in $S_{2n-1}(y)$ è il seguente

$$(28) \quad \lambda_{n+1} = - \sum_{r=0}^{2n-1} \frac{\alpha_r^{(n)}}{c_2 + 2(2n-1-r)c_1}.$$

Si avrà dunque

$$\int_0^y P_1(x, y) F_n(x, y) dx = (b-a)[S_{2n-1}(y) + \varphi_1(y) V_{2n-1}^{(2)}(y) - \varphi_2(y) V_{2n-1}^{(1)}(y)],$$

e, finalmente,

$$(29) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y^2} \int_0^y P_1(x, y) G_n(x, y) dx = (b-a) \lambda_{n+1}.$$

Si ha poi

$$\begin{aligned} & \int_0^y P_2(x, y) F_n(x, y) dx \\ &= \varphi_2(y) \int_0^y (b a_{2,1} x - a a_{1,1}) F_n(x, y) dx - \varphi_1(y) \int_0^y (b a_{2,2} x - a a_{1,2}) F_n(x, y) dx \\ &= \varphi_2(y) H_{2n+1}(y) + \varphi_1(y) K_{2n+1}(y), \end{aligned}$$

dove $H_{2n+1}(y)$ e $K_{2n+1}(y)$ sono due polinomi in y di grado $2n+1$, e sarà perciò

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y^2} \int_0^y P_2(x, y) G_n(x, y) dx = 0,$$

che, insieme alla (29), ci dà

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y^2} \int_0^y P(x, y) G_n(x, y) dx = (b-a) \lambda_{n+1}.$$

La (20) ci permette dunque di asserire che se è $n \geq 2$ ed esiste il limite per $y = \infty$ della (13), esisterà anche il limite della stessa espressione quando al posto di n si mette $n+1$. Avendo dimostrato la (25), resta dimostrato che la (13) tende ad un limite

quando y tende ad ∞ , e si ha per $n = 1$ la (17), per $n = 2$ la (25) e per $n > 2$ la seguente eguaglianza

$$(30) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y N(x, y) G_n(x, y) dx = -(b - a) \sum_{r=0}^{2n-3} \frac{\alpha_r^{(n-1)}}{c_2 + 2(2n-3-r)c_1}.$$

5. È facile dare l'espressione del secondo membro di quest'ultima uguaglianza per mezzo di a e di b .

Si avrà, per la (27),

$$\begin{aligned} F_n(x, y) &= \int_x^y F_{n-1}(\xi, y) F(x, \xi) d\xi = \int_x^y \sum_{r=0}^{2n-3} \alpha_r^{(n-1)} \xi^{2n-r-3} y^r (ax + b\xi) d\xi \\ &= b \sum_{r=0}^{2n-3} \frac{\alpha_r^{(n-1)}}{2n-r-1} y^{2n-1} + a \sum_{r=0}^{2n-3} \frac{\alpha_r^{(n-1)}}{2n-r-2} y^{2n-2} x - \\ &\quad - \sum_{r=0}^{2n-3} \left(b \frac{\alpha_r^{(n-1)}}{2n-r-1} + a \frac{\alpha_r^{(n-1)}}{2n-r-2} \right) y^r x^{2n-r-1}. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \alpha_r^{(n)} &= -\alpha_r^{(n-1)} \left(\frac{b}{2n-r-1} + \frac{a}{2n-r-2} \right) \quad (r=0, 1, 2, \dots, 2n-3), \\ \alpha_{2n-2}^{(n)} &= a \sum_{r=0}^{2n-3} \frac{\alpha_r^{(n-1)}}{2n-r-2}, \quad \alpha_{2n-1}^{(n)} = b \sum_{r=0}^{2n-3} \frac{\alpha_r^{(n-1)}}{2n-r-1}. \end{aligned}$$

Se n e k sono due numeri interi e positivi e $k \geq n-1$, poniamo

$$J(n, k) = \sum_{r=0}^{2n-1} \frac{\alpha_r^{(n)}}{c_2 + 2(2k+1-r)c_1}.$$

Sostituendo nel secondo membro alle $\alpha_r^{(n)}$ le loro espressioni per mezzo delle $\alpha_r^{(n-1)}$ si trova

$$J(n, k) = 2c_1 \left(\frac{a}{c_2 + 2(2k-2n+3)c_1} + \frac{b}{c_2 + 2(2k-2n+2)c_1} \right) J(n-1, k).$$

Posto

$$t(n, k) = \frac{a}{c_2 + 2(2k-2n+2)c_1} + \frac{b}{c_2 + 2(2k-2n+3)c_1},$$

ed osservando che è

$$J(1, k) = t(1, k),$$

si avrà

$$J(n, k) = (2c_1)^{n-1} t(1, k) t(2, k) \dots t(n, k).$$

Il secondo membro si può trasformare e si trova finalmente

$$J(n, k) = (2c_1)^{2n-1} \prod_{r=1}^n \frac{(2k-2r+3)a + (2k-2r+5)b}{[c_2 + 2(2k-2r+3)c_1][c_2 + 2(2k-2r+2)c_1]}.$$

Si osservi ora che la (30) si può scrivere

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y N(x, y) G_n(x, y) dx = -(b - a) J(n-1, n-2),$$

e che per conseguenza avremo

$$(31) \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y N(x, y) G_n(x, y) dx = -(b-a)(a+b)^{2n-3} \frac{\prod_{r=1}^{n-1} [(2r-1)a + (2r+1)b]}{\prod_{r=0}^{2n-3} (c_2 + 2r c_1)}.$$

Si ottiene così la seguente relazione

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y N(x, y) G_{n+1}(x, y) dx \\ = (a+b)^2 \frac{(2n-1)a + (2n+1)b}{[c_2 + 2(2n-2)c_1][c_2 + 2(2n-1)c_1]} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y N(x, y) G_n(x, y) dx. \end{array} \right.$$

Prima di chiudere il presente n°, osserviamo che il limite della (13) per $y = \infty$, quando si fa $n = 1$, esiste più generalmente quando è $\frac{a+2b}{a+b} \geq 1$. Lo stesso limite, per n qualunque, quando è $\frac{a+2b}{a+b} = 2$, cioè $a = 0$, esiste pure ma è nullo per $n > 2$, perchè, come vedremo in seguito, quando si fa $a = 0$ l'espressione

$$\frac{1}{y} \int_0^y N(x, y) F_n(x, y) dx$$

tende ad un limite finito e diverso da zero quando y tende ad ∞ .

6. I risultati fin qui ottenuti ci permettono di rappresentare la somma di una serie, soddisfacente a certe condizioni, con una formola analoga ad un'altra data dal BOREL per una serie convergente qualunque.

Richiamiamo brevemente i risultati del BOREL, mettendoli in relazione con la teoria della composizione del VOLTERRA.

Si consideri l'equazione integrale tipo VOLTERRA

$$f(y) = \varphi(y) + \int_0^y H(x, y) \varphi(x) dx,$$

nell'ipotesi che sia $H(x, y) \equiv 1$.

Chiamato $M(x, y)$ il nucleo risolvete di quest'equazione, si ha

$$M(x, y) = e^{-(y-x)}.$$

La potenza n^{esima} di composizione di $H(x, y)$ è

$$H_n(x, y) = \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Si ha quindi

$$\int_0^y M(x, y) H_n(x, y) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^y e^{-(y-x)} (y-x)^{n-1} dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^y e^{-u} u^{n-1} du,$$

e perciò

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y M(x, y) H_n(x, y) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-1} du = 1.$$

Sia ora data la serie

$$(33) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots;$$

essa si dice sommabile col *metodo esponenziale* di BOREL quando, posto

$$f(x) = u_1 + \frac{u_2 x}{1!} + \frac{u_3 x^2}{2!} + \dots$$

e supposta questa serie convergente per qualunque x , esiste l'integrale $\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx$; tale integrale si assume come somma della serie ³⁾.

Se la (33) è convergente essa è sommabile secondo BOREL e la somma coincide con la somma nel senso ordinario.

Si può dunque dire che se la (33) è sommabile secondo BOREL, la somma viene espressa dal seguente limite

$$(34) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y e^{-x} f(x) dx,$$

o, ciò che è lo stesso, dal seguente

$$(35) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y e^{-(y-x)} f(y-x) dx.$$

Adoperando le notazioni introdotte al principio di questo n°, si può dunque dire che se la (33) è sommabile secondo BOREL, la somma viene espressa dal seguente limite

$$(36) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y M(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} u_n H_n(x, y) dx.$$

In particolare, se la (33) è una serie di potenze nella variabile z ,

$$(37) \quad a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

la $f(x)$ corrispondente è

$$f(x, z) = a_1 z + \frac{a_2 z^2 x}{1!} + \frac{a_3 z^3 x^2}{2!} + \dots,$$

che, quando si fissa z , considerata come funzione di x , è una funzione intera se la (37) ha un raggio di convergenza non nullo. La funzione analitica di z rappresentata nel cerchio di convergenza della (37) dalla (37) stessa, viene rappresentata in una certa parte del piano della variabile z , che prende il nome di *poligono di sommabilità*, e che comprende il cerchio di convergenza della (37), dall'espressione $\int_0^\infty e^{-x} f(x, z) dx$, o, ciò che è lo stesso, dal seguente limite

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y M(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n H_n(x, y) dx.$$

³⁾ É. BOREL *Leçons sur les séries divergentes* (Paris, Gauthier-Villars, 1901) pp. 97-129.

Dei risultati analoghi si possono stabilire valendoci della (31).

Osserviamo anzitutto che se $F_n(x, y)$ è la potenza n^{esima} di composizione di $F(x, y) = ax + by$, si trova facilmente, per $x \leq y$,

$$(38) \quad 0 \leq F_n(x, y) \leq \frac{(by)^n}{(n-1)!} (y-x)^{n-1}.$$

Infatti, per $n=1$, si ha $F_1(x, y) = ax + by < by$; $F_1(x, y) \geq (a+b)y \geq 0$, e la (38) è soddisfatta. Se essa è soddisfatta per F_1, F_2, \dots, F_{n-1} , sarà soddisfatta pure per F_n . Si ha infatti

$$F_n(x, y) = \int_x^y F_{n-1}(x, \xi)(a\xi + by) d\xi,$$

e perciò sarà certamente $F_n(x, y) \geq 0$; inoltre si avrà

$$\begin{aligned} F_n(x, y) &< by \int_x^y \frac{(b\xi)^{n-1}}{(n-2)!} (\xi-x)^{n-2} d\xi < \frac{(by)^n}{(n-2)!} \int_x^y (\xi-x)^{n-2} d\xi \\ &= \frac{(by)^n}{(n-1)!} (y-x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Data allora la serie (33), formiamo l'altra serie

$$(39) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n K_n(x, y),$$

dove poniamo

$$K_n(x, y) = \frac{G_n(x, y)}{\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y N(x, y) G_n(x, y) dx} = \frac{G_n(x, y)}{(b-a)^{\lambda_n}}.$$

I termini della (39) non superano, in valore assoluto, i termini dell'altra serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \frac{(by)^n (y-x)^{n-1}}{(b-a)^{|\lambda_n|} (n-1)! y^{2n-1}},$$

e perciò anche quelli della seguente

$$(40) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| y^2 \frac{b^n}{(b-a)^{|\lambda_n|} (n-1)!}.$$

Il rapporto tra il termine di posto $n+1$ e quello di posto n nella (40), tenendo conto della (32), è il seguente

$$(41) \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \frac{b}{n} \frac{[c_2 + 2(2n-2)c_1][c_2 + 2(2n-1)c_1]}{(a+b)^2 [(2n-1)a + (2n+1)b]}.$$

Se supponiamo che $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$, per n sufficientemente grande, si mantenga minore di una quantità h , il rapporto (41), per n sufficientemente grande, sarà minore di $\frac{2hb}{a+b}$.

Se questa quantità è minore di 1 la (40) converge, e perciò converge anche la (39). (È però da osservare che allora anche b è minore di 1 e la (33) converge assolutamente).

Supposta soddisfatta l'ineguaglianza

$$(42) \quad \frac{2 \, b \, b}{a + b} < 1,$$

avremo

$$(43) \quad \int_0^y N(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} u_n K_n(x, y) dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \int_0^y N(x, y) K_n(x, y) dx.$$

Se il secondo membro di questa eguaglianza converge uniformemente per y sufficientemente grande, il primo, quando y tende ad ∞ , tende alla somma della (33). La convergenza uniforme del secondo membro si presenta, per esempio, quando $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| n$ si mantiene limitato.

Infatti, posto per semplicità

$$\chi_n(y) = \int_0^y N(x, y) K_n(x, y) dx; \quad \psi_n(y) = \int_0^y P(x, y) K_n(x, y) dx; \quad l_n = -(b-a)\lambda_n,$$

dove $P(x, y)$ è definita dalla (19) e λ_n dalla (28), si trova facilmente, tenendo conto della (20),

$$\chi_n(y) = \frac{1}{l_n} \left(\sum_{r=2}^{n-1} \frac{l_r \psi_r(y)}{y^{2(n-r)}} + \frac{l_2 \chi_2(y)}{y^{2n-4}} \right).$$

Ricordando le definizioni di $P_1(x, y)$ e $P_2(x, y)$, date dalle (23) e (24), abbiamo

$$\psi_r(y) = \int_0^y P_1(x, y) K_r(x, y) dx + \int_0^y P_2(x, y) K_r(x, y) dx.$$

Possiamo intanto supporre, per quanto abbiamo stabilito al n° 1, che le funzioni $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ che compariscono in $P_1(x, y)$ siano positive per x sufficientemente grande ($x \geq \alpha$); allora, essendo $\varphi_2'(x) \varphi_1(x) - \varphi_1'(x) \varphi_2(x) = e^{-c_1 x^2}$, $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$ sarà, per $x \geq \alpha$, una funzione crescente di x , e perciò $P_1(x, y) = (b-a) e^{c_1 x^2} \varphi_1(y) \varphi_1(x) \left(\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} - \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} \right)$ per $x \geq \alpha$ ed $y > x$ sarà negativa. Avremo allora, essendo per la (38),

$$F_n(x, y) < \frac{b_n y^{2n-1}}{(n-1)!},$$

$$\left| \int_{\alpha}^y P_1(x, y) K_r(x, y) dx \right| < \frac{b^r y^2}{l_r (r-1)!} \int_{\alpha}^y -P_1(x, y) dx,$$

e siccome l'integrale del secondo membro tende ad un limite finito quando y tende ad ∞ , si potrà determinare una costante $A > 0$, indipendente da r , tale da avere

$$\left| \int_{\alpha}^y P_1(x, y) K_r(x, y) dx \right| < A \frac{b^r y^2}{l_r (r-1)!}.$$

Si ha poi, indicando con H una conveniente costante positiva,

$$(44) \quad \left| \int_0^x P_1(x, y) K(x, y) dx \right| < H \frac{b^r y^2}{l_r(r-1)!} [\varphi_1(y) + \varphi_2(y)],$$

e siccome $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$ tendono a zero quando y tende ad ∞ , possiamo dire che, denotando ancora con A una conveniente costante positiva indipendente da r , si avrà, per y sufficientemente grande,

$$\left| \int_0^y P_1(x, y) K_r(x, y) dx \right| < A \frac{b^r y^2}{l_r(r-1)!}.$$

Si ha poi

$$\left| \int_0^y P_2(x, y) K_r(x, y) dx \right| < \frac{b^r y^2}{l_r(r-1)!} [\varphi_1(y) h_1(y) + \varphi_2(y) h_2(y)],$$

dove $h_1(y)$ e $h_2(y)$ sono polinomi di secondo grado in y i cui coefficienti sono numeri positivi che non dipendono da r . Siccome $\varphi_1(y)y^2$ e $\varphi_2(y)y^2$ tendono a zero quando y tende ad ∞ , possiamo finalmente concludere che si può determinare una costante positiva A , indipendente da r , tale da avere, per y sufficientemente grande,

$$|\psi_r(y)| < A \frac{b^r y^2}{l_r(r-1)!}.$$

Possiamo dunque dire che, denotando con B una conveniente costante positiva, si avrà

$$|\chi_n(y)| < \frac{B}{l_n} \left(\sum_{r=2}^{n-1} \frac{b^r}{(r-1)! y^{2(n-r-1)}} + \frac{1}{y^{2n-4}} \right).$$

Il termine generale della serie che comparisce nel secondo membro della (43) non supera dunque il prodotto della costante B per la quantità

$$\frac{|u_n|}{l_n} \left(\sum_{r=2}^{n-1} \frac{b^r}{(r-1)! y^{2(n-r-1)}} + \frac{1}{y^{2n-4}} \right).$$

Se si suppone che $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| n$ si mantenga limitato, si può asserire che il detto termine generale non supera, in valore assoluto, il prodotto di una conveniente costante per la quantità

$$\frac{1}{n! l_n} \left(\sum_{r=2}^{n-1} \frac{b^r}{(r-1)! y^{2(n-r-1)}} + \frac{1}{y^{2n-4}} \right),$$

che si può considerare come il termine generale di una serie convergente i cui termini sono funzioni decrescenti di y , e perciò uniformemente convergente.

Possiamo dunque dire che nell'ipotesi fatta si avrà:

$$(45) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{y=\infty} \int_0^y N(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} u_n K_n(x, y) dx,$$

dove il secondo membro è analogo alla (36) od alla (35).

Se poi si pone

$$k(y) = \frac{d}{dy} \left(\int_0^y N(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} u_n K_n(x, y) dx \right),$$

si può scrivere

$$(46) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \int_0^{\infty} k(x) dx,$$

ed in questa il secondo membro è analogo alla (34).

In particolare, se le (45) e (46) si applicano alla (37) si può avere, in casi particolari, la rappresentazione di una funzione analitica. Le (45) e (46) non possono forse avere l'importanza delle corrispondenti di BOREL, perchè le condizioni sufficienti alla loro validità, che abbiamo dato avanti, assicurano la convergenza della (33), e se applicate alla (37) assicurano che questa rappresenta una funzione intera di ζ . Noi qui le diamo semplicemente perchè ci sembra che abbiano un interesse teorico, in quanto ci fanno prevedere che ci possa essere un legame tra una teoria più larga di quella del BOREL e quella della composizione di prima specie del VOLTERRA, e forse l'esempio che qui trattiamo, e che abbiamo scelto a caso, potrebbe aprire la via ad una serie di ricerche importanti.

Osserviamo poi che, se poniamo

$$T_n(x, y) = \frac{\frac{1}{y^2} G_n(x, y)}{\lim_{y=\infty} \frac{1}{y^2} \int_0^y P_1(x, y) G_n(x, y) dx},$$

si può vedere facilmente che l'espressione $\int_0^y P_1(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} u_n T_n(x, y) dx$ per $y = \infty$ tende alla somma della (33), quando è soddisfatta la (42). In particolare si avrà

$$(47) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n = \lim_{y=\infty} \int_0^y P_1(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n T_n(x, y) dx,$$

in un conveniente cerchio col centro nel punto $\zeta = 0$, quando la serie del primo membro ha un raggio di convergenza non nullo. Si potrà anche scrivere nel detto cerchio

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n = \int_0^{\infty} f(x, \zeta) dx,$$

dove $f(y, \zeta)$ è la derivata rispetto ad y della funzione sotto il segno limite del secondo membro della (47).

7. Possiamo aggiungere ancora qualche cosa sulle applicazioni dei risultati del presente lavoro.

Si definiscano $M(x, y)$ ed $H_n(x, y)$ come al n° precedente, e sia $f(x)$ una funzione definita per tutti i valori di x non minori di un numero fisso, per esempio per $x \geq 0$, e limitata in ogni intervallo finito.

Si ponga $f(\infty) = \lim_{x=\infty} f(x)$, quando questo limite esiste, ed

$$f(\infty) = \lim_{y=\infty} \int_0^y f(x) M(x, y) H_n(x, y) dx,$$

quando esiste questo secondo limite. Si vede subito che quando esiste il primo limite esiste anche il secondo ed è uguale al primo. Si ha in particolare un metodo per definire la somma di una serie divergente, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, ponendo $f(x) = \sum_{g(n) \leq x} a_n$, intendendo che la somma sia estesa a tutti i valori di n che rendono la funzione crescente e positiva di y , $g(y)$, non maggiore di x . Di tale metodo mi sono occupata in altro lavoro ⁴⁾; ed esso è equivalente ad un altro introdotto dal RIESZ. Se si prende $g(y) = \log y$, il detto metodo è equivalente a quello della media aritmetica di CESÀRO di ordine n .

In modo analogo, lasciando a $P_i(x, y)$ e $T_n(x, y)$ il significato che hanno nel n° precedente, si può definire $f(\infty)$ ponendo

$$(48) \quad f(\infty) = \lim_{y=\infty} \int_0^y f(x) P_i(x, y) T_n(x, y) dx,$$

quando questo limite esiste. Siccome $P_i(x, y)$ è negativa a partire da un certo valore di x , qualunque sia $y > x$, e siccome, d'altra parte, abbiamo per la (44) che, denotando con c un numero positivo qualunque, si ha

$$\lim_{y=\infty} \int_0^c |P_i(x, y)| T_n(x, y) dx = 0,$$

possiamo dire che se esiste il limite di $f(x)$ per $x = \infty$, esisterà, e sarà uguale ad esso, il limite che comparisce nella (48). Si ha così un metodo, che credo nuovo, per definire la somma di una serie divergente.

8. Supponiamo ora che in $F(x, y) = ax + by$ sia $a = 0$: supporremo senz'altro $b = 1$. Denotando ancora con $N(x, y)$ il nucleo risolvante dell'equazione integrale

$$f(y) = \varphi(y) + \int_0^y F(x, y) \varphi(x) dx,$$

con $F_n(x, y)$ la potenza n^{esima} di composizione di $F(x, y)$ e ponendo

$$R_n(x, y) = \frac{F_n(x, y)}{y},$$

dimostreremo la seguente relazione

$$(49) \quad \lim_{y=\infty} \int_0^y N(x, y) R_n(x, y) dx = 1.$$

⁴⁾ P. NALLI, *Sulla sommabilità delle serie, con particolare riguardo alle serie di DIRICHLET* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLII (1917) pp. 61-72].

Si trova intanto facilmente

$$F_n(x, y) = y \frac{(y^2 - x^2)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}$$

e perciò

$$N(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} F_n(x, y) = y e^{-\frac{y^2 - x^2}{2}}.$$

Cominciamo col dimostrare la (49) per $n = 1$.

Si ha

$$\int_0^y N(x, y) R_1(x, y) dx = \int_0^y e^{-\frac{y^2 - x^2}{2}} y dx.$$

Il secondo membro è il quoziente delle due funzioni $\int_0^y e^{\frac{x^2}{2}} dx$ ed $e^{\frac{y^2}{2}} y^{-1}$ che per $y = \infty$ tendono tutte e due ad ∞ : applicando la regola di L'HOSPITAL si trova che il limite del quoziente è l'unità; la (49) è così dimostrata per $n = 1$. Per dimostrarla in generale, supponiamola vera per R_1, R_2, \dots, R_{n-1} : faremo vedere che allora essa è vera anche per R_n .

Si ha

$$\int_0^y N(x, y) R_n(x, y) dx = e^{-\frac{y^2}{2}} y \int_0^y e^{\frac{x^2}{2}} \frac{(y^2 - x^2)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} dx;$$

qui il secondo membro è il quoziente delle due funzioni $\int_0^y e^{\frac{x^2}{2}} \frac{(y^2 - x^2)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} dx$ ed $e^{\frac{y^2}{2}} y^{-1}$.

Anche qui si può applicare la regola di L'HOSPITAL: la derivata della prima funzione è $y \int_0^y e^{\frac{x^2}{2}} \frac{(y^2 - x^2)^{n-2}}{2^{n-2}(n-2)!} dx$, la derivata della seconda è $e^{\frac{y^2}{2}} (1 - y^{-2})$ e quindi la (49) è soddisfatta se è soddisfatta la relazione

$$\lim_{y=\infty} (1 - y^{-2}) y e^{-\frac{y^2}{2}} \int_0^y e^{\frac{x^2}{2}} \frac{(y^2 - x^2)^{n-2}}{2^{n-2}(n-2)!} dx = 1,$$

che, evidentemente, è valida, perchè si è supposto che la (49) è vera quando al posto di n si mette $n - 1$. La (49) è dimostrata così in generale.

9. Supponiamo ora che la serie (33) sia tale che il rapporto $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ per n sufficientemente grande si mantenga minore di una quantità h , allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n R_n(x, y)$$

converge qualunque siano y ed x , e, fissato y , converge uniformemente rispetto ad x nell'intervallo $(0, y)$.

Supponiamo $h < 1$: allora la (33) converge: dimostreremo che si ha

$$(50) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{y=\infty} \int_0^y N(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} u_n R_n(x, y) dx.$$

Infatti, poniamo per semplicità

$$\varphi_n(y) = \int_0^y N(x, y) R_n(x, y) dx;$$

fissiamo $\alpha > 0$ e denotiamo con m_n il massimo valore di $\varphi_n(y)$ per $y \geq \alpha$, ovvero poniamo $m_n = 1$ se per qualunque $y \geq \alpha$ è $\varphi_n(y) \leq 1$. Sarà quindi $m_n \geq 1$. Denotiamo poi con l un numero maggiore di 1 e non minore del limite superiore di tutti i numeri $\varphi_n(\alpha)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) (limite superiore che è certamente finito), e di m_2 . Se è $m_n > 1$ sarà o $m_n = \varphi_n(\alpha)$, e perciò $m_n \leq l$, ovvero $m_n = \varphi_n(y_0)$, essendo y_0 un punto interno all'intervallo (α, ∞) .

In questo secondo caso, in y_0 si annulla la derivata di $\varphi_n(y)$, che, supposto $n \geq 2$, è la seguente

$$-y \varphi_n(y) + \frac{\varphi_n(y)}{y} + y \varphi_{n-1}(y).$$

Si avrà dunque

$$m_n = \frac{\varphi_{n-1}(y_0)}{1 - \frac{1}{y_0^2}}$$

e perciò, posto

$$c = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha^2}},$$

$$m_n < c m_{n-1}.$$

Si avrà dunque che m_n non supera il più grande dei tre numeri: 1, l , $c m_{n-1}$, ossia il più grande dei due numeri l , $c m_{n-1}$. Applicando lo stesso risultato ad m_{n-1} , si può dire che m_n non supera il più grande dei numeri l , lc , $c^2 m_{n-2}$, ossia, essendo $c > 1$, il più grande dei due numeri lc , $c^2 m_{n-2}$, e così via; si arriva finalmente alla conclusione che m_n non supera il più grande dei due numeri lc^{n-3} , $c^{n-2} m_2$, ed essendo $m_2 \leq l$, concludiamo che m_n non supera il numero lc^{n-2} . Ora si osservi che c è maggiore di 1, ma, scegliendo α sufficientemente grande, si può rendere pro-

simo ad 1 quanto si vuole, e perciò, se si suppone che $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ finisca col mantenersi minore di una quantità $b < 1$, si può dire che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi_n(y)$ converge uniformemente nell'intervallo (k, ∞) , quando si sceglie k sufficientemente grande. Ne viene che l'espressione

$$\int_0^y N(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} u_n R_n(x, y) dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi_n(y)$$

quando y tende ad ∞ tende alla somma della (33), cioè resta dimostrata la (50).

In particolare, si avrà

$$(51) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y N(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n R_n(x, y) dx$$

in ogni punto z dove il primo membro converge; se il primo membro converge in qualche punto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n R_n(x, y)$ converge qualunque siano x, y , e z . L'espressione che compare nel secondo membro della (51) presenta dunque una perfetta analogia con la (36) di BOREL e forse, come questa, potrebbe servire a rappresentare la funzione analitica definita dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ in qualche regione più vasta del cerchio di convergenza della serie.

Concludiamo osservando, che, anche nel caso in cui è $a=0$, è valida la (29) ed in corrispondenza la (47) e la (48). Ma siccome nel caso in cui è $a=0$, diversamente di quanto succede per $a < 0$, si ha, qualunque siano x ed y , $N(x, y) > 0$, si può, in modo analogo alla (48), definire $f(\infty)$ per mezzo della relazione

$$f(\infty) = \lim_{y=\infty} \int_0^y f(x) N(x, y) R_n(x, y) dx,$$

e si avrà anche qui

$$f(\infty) = \lim_{x=\infty} f(x)$$

quando questo limite esiste.

Palermo, novembre 1916.

PIA NALLI.

SULLA CURVATURA DELLE SUPERFICIE E VARIETÀ.

Memoria di **Francesco Severi** (Padova).

Adunanza del 25 febbraio 1917.

In questo lavoro rielaboro, da un punto di vista più geometrico del consueto, la teoria della curvatura delle superficie e varietà.

Lo spunto per tale rielaborazione mi venne da un'osservazione che mi capitò di fare parlando col Collega Prof. LEVI-CIVITA dei notevoli risultati da lui or ora ottenuti nella Memoria: *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione della curvatura riemanniana*, pubblicata in questo volume dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ¹⁾.

L'osservazione cui alludo si riferiva a ciò: che il concetto di parallelismo fra direzioni, entro una varietà V_n , a metrica qualsiasi, introdotto con felice idea dal Collega, poteva presentarsi sotto una forma geometrica affatto indipendente dallo spazio euclideo S_N in cui la V_n è immersa, restando così a priori manifesto il carattere intrinseco di quel concetto, rispetto alla data varietà; cosa che al LEVI-CIVITA risulta a posteriori dalle equazioni differenziali, che esprimono il modo di variare di una direzione parallela ad una data, lungo un assegnato cammino (cfr. col § 3 di *M.*).

Il desiderio di scorgere sotto un aspetto geometrico elementare, spoglio il più possibile da sviluppi algoritmici eleganti, ma tuttavia complessi, i rapporti concettuali che conducono alla bella definizione data dal LEVI-CIVITA, per la curvatura riemanniana d'una V_n , mi ha poi spinto a ristudiare la cosa *ab imis* anche per le superficie, posto che la definizione intrinseca ch'io davo del parallelismo fra direzioni, induceva appunto a ricercar sulle superficie i rapporti essenziali in questione.

D'altronde a rielaborar da un punto di vista più sintetico la teoria della curvatura delle superficie, mi spingeva pure il desiderio di giungere ad un'interpretazione geometrica della definizione di curvatura d'una varietà, data originariamente dal RIEMANN ²⁾.

¹⁾ Citerò nel seguito con una *M.* la Memoria del LEVI-CIVITA.

²⁾ Non mancan di certo pregevoli esposizioni geometriche della teoria della curvatura totale delle superficie; ma io dovevo piegar la mia trattazione a particolari esigenze, in vista degli scopi che mi proponevo per le varietà.

Tutto ciò spieghi perchè mi sia indotto a ripercorrere un terreno ormai illustrato in tutti i suoi dettagli, da Memorie e da Trattati classici.

Debbo ora esporre, in brevi cenni riassuntivi, il contenuto di questo lavoro.

Premetto anzitutto alcuni richiami alle coordinate geodetiche polari, sopra una superficie qualunque S , ed a certe altre coordinate, usate qua e là da vari Autori, ed in ispecial modo dal RIEMANN, e ch'io — dovendo nominarle spesso — mi permetto di chiamare coordinate cartesiane curvilinee, perchè si esprimono per le coordinate polari mediante le stesse formole, che legano nel piano coordinate cartesiane e polari.

Nel n° 2 collego la considerazione delle coordinate geodetiche polari ad un modo speciale di riguardare una superficie qualunque S , come la deformata di un velo piano, originariamente tangente ad S in un punto P , inestendibile lungo le rette per P ed elastico lungo i circoli di centro P . Nella deformazione un parallelogrammo, avente un vertice in P , si trasforma in un *quadrilatero* $PQP'Q'$ che chiamo di RIEMANN (n° 9), perchè la definizione riemanniana di curvatura, nel caso delle superficie, s'interpreta appunto nel modo seguente (n° 9):

Indicata con Δ l'area $PQP'Q'$ e con K la curvatura totale di S in P , supposto che il quadrilatero si contragga indefinitamente verso P , viene:

$$\frac{1}{3} K = \lim \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}.$$

Questa definizione geometrica di K , presenta però lo svantaggio, rispetto a quelle più sotto indicate, che, per quanto semplice e suggestiva, non è intrinseca.

Per ottenere espressioni limiti intrinseche della curvatura d'una superficie, ed in particolare l'espressione mediante elementi metrici di un quadrilatero di LEVI-CIVITA (parallelogrammoide, come lo chiama l'A.), cerco di ridurmi al caso d'una sfera (reale od imaginaria), provando che, per giungere alle espressioni limiti desiderate, è perfettamente lecito, di fronte all'ordine infinitesimale delle quantità che entrano in giuoco, di sostituire alla nostra superficie una sfera.

Ognuno ravviserà l'analogia di questo procedimento con quello che si segue nella Geodesia, allorquando in un ordine d'approssimazione soddisfacente per la pratica, si sostituiscono alle figure geodetiche tracciate sopra una zona non troppo estesa dell'ellissoide terrestre, figure geodetiche tracciate sopra una sfera di raggio conveniente.

In sostanza io non faccio che precisare con un'analisi un po' accurata (n° 3, 4), rispetto a quali ordini infinitesimali è lecita la sostituzione di elementi metrici di un intorno d'una superficie qualunque S , con elementi metrici d'una sfera \bar{S} . E trovo così che alle lunghezze degli archi geodetici tracciati su S , si posson sostituire le lunghezze di archi di circoli massimi di \bar{S} , a meno di quantità del 4° ordine ³⁾; che agli angoli di S si posson sostituire gli angoli di \bar{S} a meno di quantità del 3° ordine; etc.

³⁾ Non basta, per concluder ciò, osservare che i ds^2 delle S , \bar{S} , sotto la forma geodetica, cominciano a differire dal 5° ordine in poi (cfr. col n° 4).

Concludo in tal modo che sopra una superficie qualunque vale, in seconda approssimazione, la trigonometria sferica ($K > 0$) o pseudosferica ($K < 0$). Nel suo complesso la trigonometria sferica o pseudosferica si trasporta a meno di quantità del 3° ordine, ma speciali relazioni si trasportano a meno di quantità del 4° ed anche del 5° ordine.

Passando ad applicare tale conclusione alla teoria della curvatura gaussiana, trovo subito per questa, sia l'espressione mediante il rapporto tra l'eccesso e l'area di un triangolo geodetico infinitesimo (GAUSS), sia l'espressione (contenuta implicitamente in una relazione che s'incontra in DARBOUX):

$$\frac{1}{3} K = \lim \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b^2 c^2},$$

ove K è la curvatura di S in un punto A e b, c son le lunghezze dei cateti, a la lunghezza dall'ipotenusa di un triangolo geodetico ABC , rettangolo in A , il quale si contragga indefinitamente verso A .

L'espressione della curvatura di S nel punto P :

$$(1) \quad K = \lim \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2},$$

cui si perviene con LEVI-CIVITA, mediante un parallelogrammoide $PQP'Q'$ d'area Δ — figura costituita da due archi geodetici uguali PP', QQ' formanti angoli corrispondenti uguali ad un medesimo ω , colla geodetica PQ (base) e dall'arco geodetico $P'Q'$ (soprabase) — vien qui ritrovata mediante elementari proprietà geometriche della sfera (n° 8).

Poichè alla soprabase geodetica $P'Q'$, colla quale si chiude il parallelogrammoide, si può sostituire un arco qualunque, infinitesimo cogli altri lati del quadrilatero (vedi il § 18 di *M.* ed il n° 8 di questo lavoro), così la stessa espressione di K vale se si prende come soprabase un arco di equidistanza geodetica, obliqua secondo ω , da PQ .

Per le superficie a curvatura costante, le linee di equidistanza obliqua da una data geodetica, coincidono colle linee ad essa geodeticamente parallele, e la curvatura K risulta espressa dalla formula

$$K = \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2},$$

ove $PQP'Q'$ è un qualunque parallelogrammoide *finito*, d'area Δ , chiuso da una soprabase geodeticamente parallela a PQ .

Ritornando alle superficie a curvatura variabile, trovo che l'espressione limite (1) vale anche quando si riferisca ad un quadrilatero geodetico $PQP'Q'$, rettangolo in P , in Q ed in P' . Sopra una superficie a curvatura costante (piano non euclideo) un tal quadrilatero riducesi alla figura fondamentale della geometria piana di LAMBERT, come il parallelogrammoide geodetico di LEVI-CIVITA, per $\omega = \frac{\pi}{2}$, riducesi ad un quadrilatero birettangolo isoscele, figura fondamentale della geometria piana di SACCHERI.

Per completar la considerazione dei quadrilateri che, sopra una superficie, conservan qualcuna delle proprietà caratteristiche dei parallelogrammi euclidei, prendo in esame anche un quadrilatero $PQ P' Q'$ racchiuso da 2 archi geodetici PQ , PP' , formanti un angolo ω , e da due archi $P' Q'$, QQ' di equidistanza obliqua, secondo ω , rispettivamente da PQ , PP' .

Un quadrilatero siffatto non dà però luogo ad alcuna espressione di K analoga alle precedenti, perchè ha i lati opposti uguali, a meno di quantità del 4° ordine. Dal punto di vista delle lunghezze dei lati, esso rassomigliasi perciò ad un parallelogrammo euclideo più degli altri quadrilateri sopra considerati.

Tuttavia se, limitandoci al caso $\omega = \frac{\pi}{2}$, nel qual caso il quadrilatero è racchiuso da due geodetiche ortogonali e da due linee ad esse geodeticamente parallele, si considera il quarto angolo γ (non retto) dal quadrilatero e la sua area Δ , si ottiene per la curvatura K di S in P , l'espressione:

$$K = \lim \frac{\frac{\pi}{2} - \gamma}{\Delta},$$

analoga alla

$$K = \lim \frac{\gamma - \frac{\pi}{2}}{\Delta},$$

cui si perviene mediante il quarto angolo γ di un quadrilatero di LAMBERT (n° 9).

Nel Capitolo secondo, applicando alle varietà i risultati precedenti, dò anzitutto la interpretazione geometrica della definizione originaria di RIEMANN per la curvatura K di una varietà V_n , secondo un'assegnata giacitura. Una volta fatto derivar, per deformazione, l'intorno di un punto P di V_n , dall'intorno del punto stesso nello spazio euclideo S_n ivi tangente a V_n , considerando lo S_n come inestendibile nelle direzioni delle rette tangenti in P e come elastico nelle direzioni delle ipersfere di centro P , la circostanza che un piano di S_n , passante per P , si muti in una superficie geodetica di V_n , permette di trasportar subito alle varietà la formola già stabilita per le superficie.

Passo quindi ad esporre la definizione geometrica intrinseca, cui già ho alluso in principio, del parallelismo fra direzioni: Dati sopra V_n due punti A , A_1 , infinitamente vicini, ed una direzione (ξ) uscente da A , la direzione (ξ_1) parallela a (ξ) , condotta per A_1 , è quella che, sulla superficie geodetica di centro A , individuata dalle direzioni (ξ) , (AA_1) , forma colla geodetica AA_1 un angolo (corrispondente) eguale a quello formato da (ξ) colla geodetica stessa.

E dimostro la coincidenza di questa definizione con quella del LEVI-CIVITA, pervenendo di nuovo, in modo autonomo e intrinseco, alle equazioni differenziali, che reggono il problema del parallelismo.

La definizione esposta mi consente di trasportar senz'altro alle varietà la espressione della curvatura mediante un parallelogrammoide (n° 14).

Aggiungo alcune semplici considerazioni geometriche dirette a ritrovare le proprietà fondamentali del parallelismo fra direzioni (n^i 12, 13).

CAPITOLO I.

Sulla curvatura totale delle superficie.

I. Richiami concernenti le coordinate geodetiche polari. Coordinate cartesiane curvilinee. — Sopra una superficie S fissiamo un sistema di coordinate geodetiche polari (ρ, θ) , avente per polo ($\rho = 0$) un punto P (regolare) di S e per asse polare una geodetica ($\theta = 0$) uscente da P ⁴⁾. Considerata per P un'altra geodetica, il cui verso positivo formi col verso positivo della precedente l'angolo ω , compreso fra 0 e π , poniamo:

$$(2) \quad u = \rho \frac{\sin(\omega - \theta)}{\sin \omega}, \quad v = \rho \frac{\sin \theta}{\sin \omega}.$$

Da queste si ricavano le ρ, θ come funzioni regolari delle u, v in tutto l'intorno di P (eccetto in P stesso). Si ha precisamente:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \omega}, \quad \sin \theta = \frac{v \sin \omega}{\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \omega}}, \\ \sin(\omega - \theta) = \frac{u \sin \omega}{\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \omega}}, \end{array} \right.$$

ove pel radicale si accetti il segno $+$.

Le u, v si posson pertanto assumere come coordinate di un punto M variabile nell'intorno di P : nel seguito per brevità le chiameremo *coordinate cartesiane curvilinee*, per evidente analogia colle ordinarie coordinate cartesiane nel piano.

Esse presentan il vantaggio, rispetto alle coordinate polari, che la corrispondenza fra i punti dell'intorno di P e le coppie di valori di u, v , è biunivoca senza eccezione anche in P . Ed è appunto questa circostanza che ne rende opportuno l'uso pei nostri scopi ulteriori.

Il quadrato dell'elemento lineare di S , espresso per le coordinate ρ, θ , è dato da

$$(4) \quad ds^2 = d\rho^2 + G d\theta^2,$$

ove la funzione $G(\rho, \theta)$, sviluppata secondo le potenze ascendenti di ρ , nell'intorno di

⁴⁾ Vedi ad es. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 2^a edizione (Pisa, Spoerri, 1902), vol. I, pag. 194.

$\rho = 0$, è del tipo:

$$(5) \quad G = \rho^2 \left(1 - \frac{K}{3} \rho^2 + \dots \right),$$

K essendo la curvatura totale di S nel punto P ⁵⁾.

Dalle (2), differenziando e risolvendo rispetto a $d\rho$, $d\theta$, si traggono le

$$d\rho = \cos \theta du + \cos(\omega - \theta) dv,$$

$$d\theta = -\frac{\sin \theta}{\rho} du + \frac{\sin(\omega - \theta)}{\rho} dv,$$

e sostituendo in (4), si ha l'espressione del ds^2 rispetto alle u , v :

$$(6) \quad ds^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2,$$

con

$$(7) \quad \begin{cases} E' = 1 + \left(\frac{G}{\rho^2} - 1 \right) \sin^2 \theta, & F' = \cos \omega - \left(\frac{G}{\rho^2} - 1 \right) \sin \theta \sin(\omega - \theta), \\ G' = 1 + \left(\frac{G}{\rho^2} - 1 \right) \sin^2(\omega - \theta). \end{cases}$$

2. *Una superficie qualunque considerata come la deformata di un velo piano intessuto con un fascio di fibre rettilinee inestendibili e con un fascio di fibre circolari elastiche.* — Le coordinate geodetiche polari, su di una superficie S , conducono spontaneamente alla considerazione di una corrispondenza biunivoca fra i punti della S ed i punti del piano S_0 tangente ad S nel polo P , sul qual piano si assuma un sistema di coordinate polari (ρ_0, θ_0) , avente il polo $\rho_0 = 0$ in P e l'asse polare $\theta_0 = 0$ tangente alla geodetica $\theta = 0$. Si posson allora associare due punti di S , S_0 , che abbian le stesse coordinate polari ($\rho = \rho_0$, $\theta = \theta_0$).

In questa corrispondenza ai circoli del piano col centro in P , rispondon i circoli geodetici della superficie col centro pure in P . La corrispondenza può quindi fisicamente realizzarsi così:

S'immagini il piano S_0 come un tessuto formato mediante due fasci di fibre: le une, inestendibili, che son le rette passanti per P , le altre, elastiche, che son i circoli di centro P . Tenuto fisso il punto P di S_0 ed il relativo intorno di 1° ordine, si può allora deformare il tessuto finchè venga a sovrapporsi ad S , per modo che le fibre inestendibili si adattino, ben tese, sulle geodetiche di S per P , con che le fibre elastiche s'adattano spontaneamente sui circoli geodetici di centro P .

Se su S_0 si scelgon due assi cartesiani u_0 , v_0 , formanti l'angolo ω , coll'origine in P e coll'asse $v_0 = 0$ coincidente con $\theta_0 = 0$, ad ogni punto del piano, di coordinate u_0 , v_0 , corrisponde su S , a deformazione avvenuta, un punto avente le medesime coor-

⁵⁾ Vedi ad es. BIANCHI, loc. cit. ⁴⁾, pag. 196.

dinate cartesiane curvilinee ($u = u_0, v = v_0$), rispetto alle due geodetiche u, v , deformate delle rette u_0, v_0 .

È appena necessario di avvertire che, invece di tener fisso P ed il relativo intorno di 1° ordine, cioè un circolo di raggio infinitamente piccolo, col centro in P , si può, nel sovrapporre S_0 ad S , tener fisso P e portare a coincidere una prefissata delle fibre elastiche circolari, col circolo geodetico di S , avente lo stesso raggio. Se a deformazione avvenuta, si vuole che ogni punto abbia conservato i valori iniziali delle coordinate polari e cartesiane, basterà operare in modo che i due punti della fibra circolare piana, corrispondenti a $\theta_0 = 0$ e a $\theta_0 = \omega$, vadano a sovrapporsi ai punti del circolo geodetico, corrispondenti agli stessi valori di θ .

Questo modo di considerare un intorno superficiale qualunque, come deformato d'un intorno piano, ci gioverà in seguito per illustrare la definizione riemanniana di curvatura d'una superficie o varietà.

3. *Proprietà della corrispondenza biunivoca che nasce fra una superficie ed una sfera, associando le coppie di punti colle stesse coordinate cartesiane.* — Gli stessi sistemi di coordinate, polari e cartesiane, definiti per S nel n° 1, li considereremo sopra una sfera \bar{S} di raggio (reale o immaginario, finito od infinito) $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$, assumendo ivi come polo, o rispettivamente origine delle coordinate, un punto \bar{P} . Conserveremo per la sfera le notazioni del n° 1, salvo che ogni simbolo letterale ad essa riferito, sarà sopralineato.

Per la sfera, $\frac{\bar{\rho}}{R}$ è la colatitudine dal polo \bar{P} e $\bar{\theta}$ la longitudine dal meridiano $\bar{\theta} = 0$, così che la funzione \bar{G} viene espressa da

$$\bar{G} = R^2 \sin^2 \frac{\bar{\rho}}{R} = \bar{\rho}^2 \left(1 - \frac{K}{3} \bar{\rho}^2 + \dots \right).$$

È quasi superfluo di avvertire che, quando K sia negativa, e quindi $R = iR'$, con R' reale, si dovrà assumere come modello *reale* della sfera immaginaria \bar{S} , una superficie pseudosferica di raggio R' , per la quale:

$$\bar{G} = \left(iR' \sin \frac{\bar{\rho}}{iR'} \right)^2 = R'^2 \sinh^2 \frac{\bar{\rho}}{R'}.$$

Con quest'avvertenza le ulteriori considerazioni valgono anche per $K < 0$, ad elementi reali di S corrispondendo sempre elementi reali della superficie sferica (o pseudosferica) su cui vogliamo rappresentare S .

Fra i punti di S ed i punti di \bar{S} , si può porre una corrispondenza biunivoca, chiamando omologhi due punti di S, \bar{S} pei quali $u = \bar{u}, v = \bar{v}$ e quindi $\rho = \bar{\rho}, \theta = \bar{\theta}$. In questa corrispondenza le geodetiche di S uscenti da P (curve $\theta = \text{cost.}$) saranno mutate in geodetiche di \bar{S} per \bar{P} , mentre alle altre geodetiche di S non corrisponderanno necessariamente geodetiche della sfera.

Assunti ora due archi finiti corrispondenti AB , $\bar{A}\bar{B}$ sopra linee omologhe, appartenenti agl'intorni di P , \bar{P} , vogliamo valutare l'ordine di grandezza della differenza fra le lunghezze di quei due archi, rispetto all'ordine di grandezza degl'intorni stessi.

Perciò scriviamo anzitutto:

$$(8) \quad u = \varepsilon x, \quad v = \varepsilon y$$

e quindi:

$$\rho = \varepsilon \delta \quad \text{con} \quad \delta = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega},$$

ove ε è un parametro positivo determinante la grandezza dell'intorno (si può ad es. pensare che l'intorno di P sia l'insieme dei punti interni ad un circolo geodetico di raggio ε , col centro in P). Quanto alle x , y , esse son due nuove variabili numeriche, che assumeremo a coordinate del punto mobile M .

Analogamente sulla sfera porremo:

$$\bar{u} = \varepsilon \bar{x}, \quad \bar{v} = \varepsilon \bar{y}, \quad \bar{\rho} = \varepsilon \bar{\delta},$$

per guisa che all'intorno di P , avente l'ordine di grandezza ε , risponderà sulla sfera un intorno, di centro \bar{P} , avente lo stesso ordine di grandezza. E per due punti omologhi di coordinate $(x, y)(\bar{x}, \bar{y})$ si avrà $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$.

Il quadrato dell'elemento lineare di S , rispetto alle nuove coordinate x, y , s'ottiene dalla (6), mediante le (8); e viene:

$$(9) \quad ds^2 = \varepsilon^2 d\sigma^2,$$

con:

$$(10) \quad d\sigma = \sqrt{E'' dx^2 + 2F'' dx dy + G'' dy^2},$$

ove E'' , F'' , G'' son le funzioni risultanti da E' , F' , G' mediante la sostituzione (8). Si noterà che i coefficienti della forma quadratica $d\sigma^2$ non contengon più il fattore ε , che essi son funzioni regolari di x, y, ε , anche per $\varepsilon = 0$, e che inoltre il discriminante $E''G'' - F''^2$, per x, y, ε reali, è essenzialmente positivo in tutto l'intorno considerato, ed eguale a $\sin^2 \omega$ per $\varepsilon = 0$.

Ne deriva che — ove si scelga nella (10) il segno $+$ del radicale — lungo una linea limitata AB , di lunghezza finita l , su cui sia contato l'arco s , da A verso B , resta definita dalla (10) una funzione essenzialmente positiva σ , uguale ad $\frac{s}{\varepsilon}$.

Analoghe considerazioni si sottintendono sulla sfera \bar{S} , ove indichiamo con $\bar{A}\bar{B}$ l'arco omologo di AB e con \bar{l} la sua lunghezza.

Ciò premesso, ricordando gli sviluppi di G , \bar{G} nell'intorno di $\rho = \bar{\rho} = 0$, si trova:

$$(11) \quad E'' - \bar{E}'' = \varepsilon^3 e, \quad F'' - \bar{F}'' = \varepsilon^3 f, \quad G'' - \bar{G}'' = \varepsilon^3 g,$$

le e, f, g essendo funzioni regolari di x, y, ε nell'intorno di $\varepsilon = 0$. E quindi, in virtù della (10) e dell'analogia sulla sfera, si otterrà:

$$(12) \quad d\sigma^2 = d\bar{\sigma}^2 + \varepsilon^3 d\tau^2,$$

ove:

$$d\tau^2 = e dx^2 + 2f dx dy + g dy^2.$$

Riferendoci a punti variabili sugli archi omologhi AB , \overline{AB} , la (12) potrà scriversi sotto la forma:

$$d\sigma - d\overline{\sigma} = \frac{\varepsilon^3 \left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2}{1 + \frac{d\overline{\sigma}}{d\sigma}} d\sigma$$

ove $\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2$ è, lungo AB , funzione regolare di σ , ε , anche per $\varepsilon = 0$; e $\frac{d\overline{\sigma}}{d\sigma} = \frac{d\overline{s}}{ds}$ è pure funzione regolare di σ , ε , costantemente maggior di zero, in quanto ad s crescente da A verso B , risponde \overline{s} crescente da \overline{A} verso \overline{B} .

Moltiplicando pertanto i due membri della precedente relazione per ε , e integrando da A a B , viene:

$$l - \overline{l} = \varepsilon^4 \int_0^\lambda \frac{\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2}{1 + \frac{d\overline{\sigma}}{d\sigma}} d\sigma;$$

e siccome $\lambda = \frac{l}{\varepsilon}$ è una quantità finita nell'intorno di $\varepsilon = 0$, giacchè gli archi che si considerano hanno l'ordine di grandezza di ε , così risulta in definitiva:

$$(13) \quad l - \overline{l} = \varepsilon^4 \varphi,$$

con φ funzione regolare di ε nell'intorno di $\varepsilon = 0$.

E si conclude che:

La differenza fra le lunghezze di due archi finiti corrispondenti della superficie e della sfera, ha l'ordine di grandezza di ε^4 .

Ci gioverà in seguito d'aver esplicitamente notato anche l'ordine di grandezza di $l^2 - \overline{l}^2$. Scrivendo questa differenza sotto la forma:

$$l^2 - \overline{l}^2 = (l - \overline{l})(l + \overline{l}),$$

ed osservando che l , \overline{l} hanno l'ordine di grandezza di ε , se ne trae che $l^2 - \overline{l}^2$ ha l'ordine di grandezza di ε^5 .

Vediamo ora qual'è l'ordine di grandezza della differenza fra gli angoli di due coppie di direzioni corrispondenti.

Sieno ds , δs due elementi lineari di S spiccati dal punto (u, v) a due punti infinitamente vicini $(u + du, v + dv)$, $(u + \delta u, v + \delta v)$. Detto ω l'angolo delle due direzioni, verrà

$$\cos \omega = E' \frac{du}{ds} \frac{\delta u}{\delta s} + F' \left(\frac{du}{ds} \frac{\delta v}{\delta s} + \frac{dv}{ds} \frac{\delta u}{\delta s} \right) + G' \frac{dv}{ds} \frac{\delta v}{\delta s},$$

o, in coordinate x, y :

$$\cos \omega = E'' \frac{dx}{d\sigma} \frac{\delta x}{\delta \sigma} + F'' \left(\frac{dx}{d\sigma} \frac{\delta y}{\delta \sigma} + \frac{dy}{d\sigma} \frac{\delta x}{\delta \sigma} \right) + G'' \frac{dy}{d\sigma} \frac{\delta y}{\delta \sigma}.$$

Analoga espressione si ha sulla sfera pel coseno dell'angolo $\bar{\omega}$ dei due elementi lineari corrispondenti. Tenendo presenti le (11), (12), e le

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma},$$

$$\frac{\delta x}{\delta \sigma} = \frac{\delta \bar{x}}{\delta \bar{\sigma}} \frac{\delta \bar{\sigma}}{\delta \sigma},$$

e analoghe per y , ne segue facilmente che $\cos \omega$, $\cos \bar{\omega}$ differiscono per termini del 3° ordine in ε , e mediante l'identità:

$$\sin \omega - \sin \bar{\omega} = \frac{(\cos \bar{\omega} - \cos \omega)(\cos \omega + \cos \bar{\omega})}{\sin \omega + \sin \bar{\omega}},$$

che anche $\sin \omega$, $\sin \bar{\omega}$, e quindi ω , $\bar{\omega}$, differiscono per termini del terzo ordine. Si conclude che:

La differenza fra due angoli corrispondenti ha l'ordine di grandezza di ε^3 .

4. *Contrazione infinitesima d'un intorno superficiale. Ordine di approssimazione per la applicabilità di un pezzo di superficie sopra una sfera.* — In tutto quanto precede s'è tenuto costante il parametro ε . Adesso supporremo invece che ε varii, tendendo a zero, a partire da un valore iniziale $\varepsilon = \varepsilon_0$.

I punti degl'intorni omologhi considerati sulle S , \bar{S} , posson allora riguardarsi, in infiniti modi, come funzioni del parametro ε . Si può cioè associare ad ogni punto che sulla superficie (o sulla sfera) abbia inizialmente le coordinate cartesiane curvilinee $\varepsilon_0 x$, $\varepsilon_0 y$, il punto, ben determinato, di coordinate cartesiane $\varepsilon x'$, $\varepsilon y'$, con

$$(14) \quad \begin{cases} x' = x'(x, y, \varepsilon) \\ y' = y'(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

ove x' , y' sieno arbitrarie funzioni regolari di x , y , ε , nell'intorno di $\varepsilon = 0$, tali che il determinante funzionale delle x' , y' rispetto alle x , y , non sia nullo nello stesso intorno.

Se la sostituzione di variabili (14) è la medesima sulla superficie e sulla sfera, si dirà brevemente, allorchè ε tenda a zero, che si opera una *contrazione infinitesima simultanea dei due intorni di P , \bar{P} su S , \bar{S}* , in quanto i punti dei due intorni, partendo dalle posizioni iniziali rispettive, si avvicinano di conserva a P , \bar{P} .

Il modo più semplice di operare una tal contrazione, è di prendere addirittura $x' = x$, $y' = y$. A questo modo di contrarre i due intorni si potranno riferire, per fissar le idee, le considerazioni successive.

Quando il valor iniziale ε_0 sia abbastanza piccolo, un arco AB di geodetica, che, sulla S , congiunga due punti A , B dell'intorno di P , risulterà individuato per ogni valor di ε , dalle posizioni dei suoi estremi, appena sieno segnati gli estremi iniziali A_0 , B_0 . E lo stesso dicasi dell'arco $\bar{A}\bar{B}$, non necessariamente geodetico, luogo dei punti

omologhi sulla sfera. Denoteremo rispettivamente con l, \bar{l} le lunghezze di questi due archi. Similmente indicheremo con l', \bar{l}' le lunghezze dell'arco geodetico che sulla sfera congiunge \bar{A}, \bar{B} e dell'arco omologo, congiungente A, B su S .

Le quantità l, l', \bar{l}, \bar{l}' son funzioni regolari di ε , nell'intorno di $\varepsilon = 0$, infinitesime con ε . Poichè si è supposto ε_0 tanto piccolo, che sin dall'inizio della contrazione ogni arco geodetico dell'intorno di P o di \bar{P} sia individuato dai suoi estremi, così i cammini geodetici segneranno sempre sugl'intorni corrispondenti al medesimo ε , il minimo percorso fra due punti, e sussisteranno perciò le disuguaglianze:

$$l' \geq l, \quad \bar{l}' \geq \bar{l}.$$

D'altronde a cagione della (13) (n° precedente), potrà scriversi:

$$l' = \bar{l}' + \varepsilon^4 \varphi, \quad l = \bar{l} + \varepsilon^4 \psi,$$

φ, ψ essendo funzioni regolari di ε nell'intorno di $\varepsilon = 0$. Sottraendo a membro a membro le precedenti, viene:

$$(l' - l) + (\bar{l} - \bar{l}') = \varepsilon^4 (\varphi - \psi).$$

Ora, poichè le due differenze $l' - l, \bar{l} - \bar{l}'$, che son funzioni regolari di ε , non divengon mai negative nell'intorno di $\varepsilon = 0$, così nessuna di esse potrà essere di ordine minore di ε^4 .

Si conclude dunque che:

« Ad una geodetica dell'una superficie, corrisponde sull'altra una linea, i cui archi « differiscono in lunghezza dagli archi geodetici aventi gli stessi estremi, per infinitesimi « del 4° ordine (rispetto ad ε , che sarà ormai assunto come infinitesimo principale) ».

Quanto agli angoli, infinitesimi con ε , formati in A, B dagli archi di lunghezze l, l' , essi differiscono per infinitesimi del 3° ordine dagli angoli corrispondenti formati in A', B' dagli archi di lunghezze \bar{l}, \bar{l}' .

Ciò posto, se ABC è un triangolo geodetico infinitesimo tracciato su S , ed $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ son i punti della sfera corrispondenti ad A, B, C , alle lunghezze a, b, c dei lati BC, CA, AB del primo triangolo, potranno sostituirsi, a meno d'infinitesimi del 4° ordine, le lunghezze $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ dei lati del triangolo geodetico $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, e agli angoli α, β, γ del primo, gli angoli $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ del secondo, a meno d'infinitesimi del 3° ordine.

Ne deriva che, nell'intorno considerato di P , valgono su S tutte le relazioni di trigonometria sferica (o pseudosferica, quando la curvatura in P sia negativa), a meno d'infinitesimi del 3° ordine rispetto alle lunghezze dei lati dei triangoli geodetici, considerate come infinitesimi del 1° ordine.

Ma esaminando più davvicino la cosa, si vede che talune di queste relazioni valgono anche in un ordine di approssimazione superiore.

Così ad es. la relazione esprimente il teorema dei seni:

$$\sin \frac{\bar{a}}{R} : \sin \frac{\bar{b}}{R} : \sin \frac{\bar{c}}{R} = \sin \bar{\alpha} : \sin \bar{\beta} : \sin \bar{\gamma},$$

ove si ponga mente che le differenze $a - \bar{a}$, $b - \bar{b}$, $c - \bar{c}$ son del 4° ordine e le differenze $\alpha - \bar{\alpha}$, $\beta - \bar{\beta}$, $\gamma - \bar{\gamma}$ del 3° ordine, si muta *a meno d'infinitesimi del 4° ordine*, nella

$$\sin \frac{a}{R} : \sin \frac{b}{R} : \sin \frac{c}{R} = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad ^6),$$

mentre la relazione:

$$\cos \frac{\bar{a}}{R} = \cos \frac{\bar{b}}{R} \cos \frac{\bar{c}}{R} + \sin \frac{\bar{b}}{R} \sin \frac{\bar{c}}{R} \cos \bar{\alpha},$$

si muta, *a meno d'infinitesimi del 5° ordine*, nella:

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos \alpha.$$

E infine la relazione:

$$\cos \bar{\alpha} = - \cos \bar{\beta} \cos \bar{\gamma} + \sin \bar{\beta} \sin \bar{\gamma} \cos \frac{\bar{a}}{R},$$

si muta nella analoga relativa agli elementi del triangolo ABC , soltanto *a meno d'infinitesimi del 3° ordine*.

Possiamo dunque enunciare:

Per l'intorno di un punto P di una superficie qualunque S , ove la superficie presenti la curvatura totale K , vale in seconda approssimazione, a meno d'infinitesimi del 3° ordine, la trigonometria sferica ($K > 0$) o pseudosferica ($K < 0$) (mentre in prima approssimazione vale la trigonometria piana). Talune relazioni di trigonometria sferica o pseudosferica, valgono anzi a meno d'infinitesimi del 4° ed anche del 5° ordine.

Nell'ordine di approssimazione così precisato, si può dire che l'intorno del punto P è applicabile sulla sfera di raggio $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$.

La proposizione dimostrata è di uso continuo in Geodesia, ove, con un'approssimazione in pratica soddisfacente, si applican le relazioni di trigonometria sferica a triangoli geodetici dell'ellissoide terrestre, i cui lati non vanno molto oltre i 200 chilometri.

Mi sia a tal proposito consentito di notare come le considerazioni che si fanno di solito per legittimar l'applicazione della trigonometria sferica ai triangoli geodetici terrestri, non appariscan del tutto esaurienti.

⁶⁾ Che il teorema dei seni valga pei triangoli geodetici, a meno di quantità del 4° ordine, è notato anche in G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, III^e partie (Paris, Gauthier-Villars, 1894), pag. 170. Veramente DARBOUX considera, invece dei seni di $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$, le lunghezze *ri-dotte* (secondo CHRISTOFFEL) dei lati a , b , c ; ma queste lunghezze, a meno appunto di quantità del 4° ordine, riduconsi a quei seni (l. c., p. 190).

Riferendosi alla forma geodetica (4) del ds^2 sulla superficie S , ove, nell'intorno di P , è

$$\sqrt{G} = \rho - \frac{K}{6}\rho^3 - \lambda\rho^4 - \dots,$$

ci si limita infatti ad osservare che, qualora, per ρ non superiore ad un limite prefissato, siano trascurabili, di fronte ad un certo ordine di approssimazione, le quantità $\lambda\rho^4$ e $\frac{K^2\rho^5}{5!}$, i ds^2 della S e della sfera di raggio $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$, possono scriversi sotto la stessa forma. E si conclude da ciò che, nello stesso ordine di approssimazione, l'intorno di P è applicabile sulla sfera di raggio R e che vale pertanto pei triangoli geodetici dell'intorno medesimo, la trigonometria sferica.

Ora questa deduzione abbisogna di qualche complemento:

1°) Perchè dal suddetto confronto non può trarsi *a priori* (senza cioè le considerazioni svolte sopra od altre equivalenti) alcuna conclusione circa la differenza fra le lunghezze degli archi *finiti* tracciati su S e sulla sfera, in quanto la (4), considerata come una relazione approssimata fra incrementi finiti ds , $d\rho$, $d\theta$, vale soltanto a meno di quantità del 3° ordine e non può pertanto servire a valutar la differenza fra i quadrati di due archi finiti della S e della sfera, a meno di quantità d'ordine superiore al 3°.

2°) Perchè non è senz'altro evidente che nello stesso ordine di approssimazione in cui le espressioni geodetiche dei ds^2 , su S e sulla sfera, posson ritenersi eguali, ad un arco geodetico dell'una superficie possa sostituirsi un arco geodetico dell'altra.

Tuttavia la semplice considerazione riferita ha un ottimo valore induttivo, e basta analizzarla con un pò di cura, come noi abbiám fatto, per pervenire, con tutto il rigore, alla deduzione desiderata.

5. *Linee di equidistanza (ortogonale ed obliqua) da una data geodetica, sopra una superficie qualunque S.* — La sostituibilità della sfera alla superficie S , a meno d'infinitesimi del 4° ordine, per tutto quanto concerne le distanze geodetiche, vale anche, nello stesso ordine di approssimazione, per le lunghezze contate sopra famiglie di linee definite in modo invariante rispetto alle geodetiche. Per non dilungarci di soverchio, ci limiteremo a stabilir la cosa per una speciale famiglia di curve, di particolare interesse pel seguito.

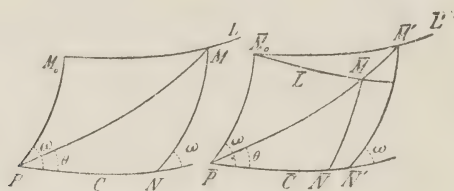
Sopra una superficie S , chiameremo *linea di equidistanza* ρ_0 secondo l'angolo ω , da una data geodetica C , il luogo degli estremi dei segmenti geodetici, di lunghezza ρ_0 , spiccati dai singoli punti di C , da una medesima banda della curva, ed in modo da formare col verso *positivo* di questa angoli eguali e dello stesso verso, o, come anche diremo brevemente, angoli corrispondenti eguali.

Così ad esempio, se S è una superficie a curvatura costante, le linee di equidistanza obliqua da una data geodetica C , coincidono colle linee di equidistanza ortogonale, o, ciò che è lo stesso, colle traiettorie ortogonali del fascio di geodetiche perpendicolari a C . Infatti, considerati sopra una, L , di queste traiettorie ortogonali, due punti, M , N ,

e condotte per essi due geodetiche che formino con C , rispettivamente nei punti H , K , angoli corrispondenti uguali, la distanza geodetica MH risulta uguale ad NK , perchè il movimento della S in sè, che lascia invariata C e che porta H in K , muta in sè L e porta M in N .

Per una sfera le linee di equidistanza obliqua, secondo un angolo arbitrario, da un dato equatore, sono i circoli a questo paralleli.

Ritornando alla superficie qualunque S , supponiamo, per maggior semplicità, che la geodetica fissa C , rispetto alla quale si vuol costruire la linea L di equidistanza ρ_0 , obliqua secondo ω , sia la geodetica $\theta = 0$, del sistema di coordinate polari, considerate dal n° 1 in poi. Sia inoltre PM_0 il segmento geodetico che segna la distanza ρ_0 , obliqua



(Fig. 1).

secondo ω , del punto $P(\varphi = 0)$ di C dalla linea L . La qual linea, una volta dati C ed ω (coi relativi versi), è perfettamente individuata da uno qualunque dei suoi punti: in particolare da M_0 .

Sulla sfera \bar{S} , alle due geodetiche C , PM_0 , rispondono le geodetiche $\bar{C}(\bar{\theta} = 0)$ e $\bar{P}\bar{M}_0(\bar{\theta} = \omega)$, uscenti dal polo \bar{P} ; e la distanza geodetica $\bar{P}\bar{M}_0$ del punto \bar{M}_0 , omologo di M_0 , da \bar{P} , uguaglia ρ_0 .

Consideriamo su \bar{S} la linea \bar{L}' di equidistanza obliqua secondo ω da \bar{C} , individuata da \bar{M}_0 , e la linea \bar{L} , pure uscente da \bar{M}_0 , omologa di L . Ad un punto $M(\varphi, \theta)$, variabile su L , risponde sulla sfera il punto \bar{M} variabile su \bar{L} ed avente le stesse coordinate φ, θ . Associeremo ad \bar{M} quel punto \bar{M}' di \bar{L}' , che ha la stessa θ , cioè l'intersezione di \bar{L}' colla geodetica $\bar{P}\bar{M}$.

Condotta per M la geodetica MN , che forma con C l'angolo ω , nel verso debito, ad essa risponderà su \bar{S} una linea congiungente \bar{M} col punto \bar{N} omologo di N ($\bar{P}\bar{N} = PN$); ma la linea che a noi preme di considerare su \bar{S} , è piuttosto la geodetica $\bar{M}'\bar{N}'$, sulla quale si misura la distanza ρ_0 , obliqua secondo ω , del punto \bar{M}' da \bar{C} . Posto $\bar{\rho}' = \bar{P}\bar{M}'$, il teorema dei seni, applicato al triangolo geodetico $\bar{P}\bar{N}'\bar{M}'$, porge:

$$\sin \frac{\bar{\rho}'}{R} \sin \theta = \sin \frac{\rho_0}{R} \sin \omega,$$

mentre dal triangolo geodetico PNM della superficie S , si ricava, a meno d'infinitesime

simi del 4° ordine (per es., rispetto a ρ , assunto come infinitesimo principale) (n° 4):

$$\sin \frac{\rho}{R} \sin \theta = \sin \frac{\rho_0}{R} \sin \omega.$$

Confrontando queste due relazioni, se ne trae che $\bar{\rho}'$ e ρ differiscono per quantità del 4° ordine. Ma poichè la differenza fra gli archi $\bar{M}_0\bar{M}$, $\bar{M}_0\bar{M}'$ è infinitesima con $\bar{\rho}' - \rho = \bar{M}\bar{M}'$, cioè col tendere di M ad M_0 , così anch'essa risulterà di 4° ordine (almeno) rispetto a ρ .

D'altra parte gli archi omologhi M_0M , $\bar{M}_0\bar{M}$ differiscono pure per quantità di 4° ordine (n° 4), dunque la differenza $\bar{M}_0\bar{M}' - M_0M$ sarà dell'ordine di ρ^4 . Si noti infine che le coordinate cartesiane curvilinee u , v del punto M di L , differiscono dalle analoghe del punto associato \bar{M}' di \bar{L}' , per quantità di 4° ordine, come risulta senz'altro dalle (2) del n° 1.

Concludendo:

Nella applicabilità approssimata di un intorno superficiale qualunque, sopra una sfera, ad una linea di equidistanza, appartenente all'intorno, si può sempre sostituire, a meno di quantità di 4° ordine, sia per quel che concerne le coordinate curvilinee dei punti della linea, sia (quindi) per quel che concerne le lunghezze dei suoi archi, un parallelo della sfera.

Applicazioni: Alcune espressioni della curvatura totale di una superficie.

6. Espressione della curvatura totale mediante l'eccesso di un triangolo geodetico infinitesimo. — Dato sopra una superficie S un triangolo geodetico infinitesimo ABC , del quale indichiamo con a , b , c le lunghezze dei lati BC , CA , AB , con α , β , γ gli angoli opposti ai lati stessi, con Δ l'area, la formula (di GAUSS):

$$K = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{\Delta},$$

che esprime, a meno d'infinitesimi del 1° ordine, la curvatura di S nel vertice A (od in qualunque altro punto) del triangolo, si può ottenere come immediata conseguenza delle precedenti considerazioni.

Invero α , β , γ si posson, a meno di quantità del 3° ordine, considerare come angoli di un triangolo geodetico infinitesimo tracciato sopra una sfera di raggio $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$, ed i lati a , b , c si posson similmente considerare come lati dello stesso triangolo sferico, a meno di quantità del 4° ordine. Sicchè il rapporto $\frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{\frac{1}{2}ab \sin \gamma}$, a meno

di quantità del 1° ordine, uguaglia $\frac{1}{R^2}$, cioè K .

7. *Espressione della curvatura totale mediante i lati di un triangolo geodetico rettangolo, infinitesimo.* — Sia ABC un triangolo geodetico infinitesimo, rettangolo in A , tracciato sopra una superficie qualunque S , e sieno a, b, c le lunghezze dei suoi lati, rispettivamente opposti ai vertici A, B, C . Potremo scrivere, a meno d'infinitesimi del 5° ordine ($n^0 4$):

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R},$$

ove $K = \frac{1}{R^2}$ è la curvatura di S in A . Da questa, sostituendo ai coseni degli archi i loro sviluppi in serie fino al 4° ordine inclusivo, dopo facili riduzioni si trae, a meno del 5° ordine:

$$b^2 + c^2 - a^2 = \frac{1}{12} R^2 (b^4 + c^4 - a^4) + \frac{b^2 c^2}{2 R^2},$$

e, tenendo conto dell'identità:

$$b^4 + c^4 - a^4 = (b^2 + c^2 - a^2)(b^2 + c^2 + a^2) - 2b^2 c^2,$$

si potrà anche scrivere:

$$b^2 + c^2 - a^2 = \frac{1}{12} R^2 (b^2 + c^2 - a^2)(b^2 + c^2 + a^2) + \frac{b^2 c^2}{3 R^2}.$$

Poichè i due termini del 2° membro sono del 4° ordine (almeno), di tale ordine risulterà pure $b^2 + c^2 - a^2$, e quindi il 1° termine del 2° membro sarà del 6° ordine. Trascurando questo termine viene:

$$b^2 + c^2 - a^2 = \frac{b^2 c^2}{3 R^2},$$

ossia:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{b^2 c^2} = \frac{1}{3} K;$$

e si può enunciare:

Avendosi sopra una superficie qualunque S un triangolo geodetico infinitesimo, rettangolo nel vertice A , se a è la lunghezza dell'ipotenusa e b, c son le lunghezze dei cateti, la curvatura K di S in A è espressa da:

$$K = 3 \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b^2 c^2}$$

od anche da

$$K = \frac{3}{4} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\Delta^2},$$

Δ essendo l'area del triangolo.

Se, invece di un triangolo rettangolo, si fosse considerato un triangolo geodetico infinitesimo qualunque, avente l'angolo in A uguale ad α , si sarebbe ottenuto, in modo analogo:

$$K = 3 \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha - a^2}{b^2 c^2 \sin^2 \alpha}.$$

Questa espressione, valida a meno di termini del 1° ordine, è racchiusa in un'altra, valida a meno di termini del 2° ordine, che trovasi in DARBOUX ⁷⁾ e che, colle nostre

7) DARBOUX, loc. cit. ⁶⁾, III partie, pag. 168, formula (35).

notazioni, si scrive sotto la forma:

$$2K_A + K_B + K_C = 12 \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha - a^2}{b^2 c^2 \sin^2 \alpha},$$

ove K_A, K_B, K_C sono i valori — differenti tra loro per quantità del 1° ordine — della curvatura totale nei tre vertici del triangolo.

8. *Espressione della curvatura mediante il parallelogrammoide di LEVI-CIVITA.* — Sopra una superficie qualunque S consideriamo con LEVI-CIVITA ⁸⁾, un « parallelogrammoide » $PQ P' Q'$, cioè un quadrilatero geodetico, i cui lati opposti PP', QQ' sieno eguali e formino colla « base » PQ angoli corrispondenti eguali (ad ω) ⁹⁾.

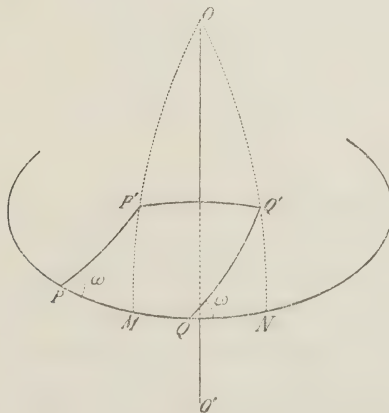
Quando si tenga fisso P e si faccian tendere a zero i lati del parallelogrammoide — in modo ch'essi si conservino infinitesimi dello stesso ordine, che si dirà primo — il limite dell'espressione $\frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}$, ove $PQ, P'Q'$ son le lunghezze rispettive della « base » e della « soprabase » e Δ è l'area del quadrilatero, secondo ha provato il LEVI-CIVITA, uguaglia la curvatura di S in P .

Profittando della applicabilità approssimata dell'intorno di P sopra una sfera di raggio $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$, possiamo ormai pervenir di nuovo rapidamente a questo risultato.

Poichè nel calcolo del limite dell'espressione scritta, le quantità d'ordine maggior di 4 son trascurabili, tenuto conto che, a meno di quantità del 5° ordine,

$$\Delta^2 = PQ^2 \times P'Q'^2 \sin^2 \omega,$$

e che, nello stesso ordine di approssimazione, ai quadrati delle lunghezze di archi geodetici tracciati su S , posson sostituirsi i quadrati delle lunghezze di archi geodetici della sfera, ci sarà lecito di eseguire il calcolo come se S fosse addirittura una sfera.



(Fig. 2).

⁸⁾ M. § 17.

⁹⁾ Definizione che particularizza, per $n=2$, quella del LEVI-CIVITA, relativa ad una V_n . Qui si tien conto che il parallelismo fra direzioni, considerato in M., per $n=2$ riducesi alla relazione d'isogonalità. Ciò è provato in M. § 9 e risulterà del resto anche dal n° 11 del presente lavoro.

Si osserverà anzitutto che, detto OO' l'asse perpendicolare al circolo massimo PQ , assunto come equatore della sfera, la rotazione attorno ad OO' , che porta P in Q , porta il circolo massimo PP' nel circolo massimo QQ' , il punto P' in Q' , il meridiano di P' e la sua traccia M sull'equatore, rispettivamente sul meridiano di Q' e sulla relativa traccia N . Sicchè l'arco MN risulta uguale a PQ , e i due triangoli geodetici PMP' , QNQ' , che si sovrappongono a rotazione avvenuta, risultan pure uguali. Pertanto il parallelogrammoide rettangolo $MNP'Q'$ è equivalente a $PQP'Q'$ ed, in luogo del rapporto iniziale, possiamo dunque considerare il rapporto $\frac{a^2 - a'^2}{a^2 b^2}$, ove si è posto $a = MN = PQ$, $a' = P'Q'$, $b = MP'$.

I punti P' , Q' , che derivan l'uno dall'altro mediante una rotazione attorno ad OO' , hanno la stessa latitudine $\lambda = \frac{b}{R}$, e inoltre la differenza fra le loro longitudini, eguaglia la differenza delle longitudini di M , N , cioè $\frac{a}{R}$. Ciò posto, dal triangolo geodetico isoscele $P'OQ'$ si ricava:

$$\cos \frac{a'}{R} = \sin^2 \frac{b}{R} + \cos^2 \frac{b}{R} \cos \frac{a}{R},$$

e quindi, a meno di quantità del 5° ordine:

$$a^2 - a'^2 = \frac{a^2 b^2}{R^2} + \frac{1}{12} \frac{a^4 - a'^4}{R^2}.$$

Questa mostra, in primo luogo, che $a^2 - a'^2$ è infinitesima del 4° ordine, ed in secondo luogo che $a^4 - a'^4 = (a^2 - a'^2)(a^2 + a'^2)$ è infinitesima del 6° ordine, sicchè, a meno di termini del 5° ordine, si potrà anche scrivere

$$a^2 - a'^2 = \frac{a^2 b^2}{R^2},$$

cioè:

$$\frac{a^2 - a'^2}{a^2 b^2} = K.$$

E possiamo quindi enunciare con LEVI-CIVITA:

Per calcolare la curvatura totale K di una superficie S in punto P , si può ricorrere ad un parallelogrammoide infinitesimo $PQP'Q'$, avente un vertice della base in P . Il rapporto fra la differenza $PQ^2 - P'Q'^2$ dei quadrati della base e della sovrabase e il quadrato dell'area del parallelogrammoide, eguaglia allora K .

Se alla sovrabase geodetica $P'Q'$ del parallelogrammoide, si sostituisce l'arco di linea di equidistanza PP' , obliqua secondo ω , dalla base PQ (n° 5), il nuovo quadrilatero così ottenuto dà luogo ad un'espressione di K identica a quella sopra trovata.

Per dimostrar quest'affermazione potremo (n° 5) riferirci ancora ad una sfera S . Faremo il calcolo supponendo anzi che il quadrilatero $PQP'Q'$, avente come sovrabase un arco di linea di equidistanza, cioè (n° 5) un arco di parallelo, abbia dimensioni finite.

Come nel caso precedente, al nuovo quadrilatero sostituiamo un quadrilatero rettangolo analogo ed equivalente, $MNP'Q'$, tenuto conto che il parallelo luogo dei punti di distanza obliqua PP' dell'equatore, è pur luogo dei punti di distanza ortogonale $P'M$.

Indicando con a'' la lunghezza dell'arco di parallelo $P'Q'$ e conservando pel resto le notazioni precedenti, poichè il raggio del parallelo $P'Q'$ è $R \cos \lambda$ e l'angolo sotteso dall'arco $P'Q'$ è $\frac{a}{R}$, verrà:

$$a'' = a \cos \lambda$$

e quindi:

$$a^2 - a''^2 = a^2 \sin^2 \lambda.$$

Prese a coordinate, sulla sfera, la longitudine φ dal meridiano OM e la latitudine λ dell'equatore PQ , l'area Δ del quadrilatero $MNP'Q'$ risulta espressa da:

$$\Delta = \int_0^\lambda \int_0^{\frac{a}{R}} R^2 \cos \lambda d\lambda d\varphi = aR \sin \lambda.$$

Si ha pertanto in definitiva:

$$\frac{a^2 - a''^2}{\Delta^2} = \frac{1}{K^2} = K,$$

cioè il teorema:

Data una superficie a curvatura costante, si costruisca su essa un quadrilatero finito $PQP'Q'$, avente per base un segmento geodetico PQ , per lati due segmenti geodetici eguali, formanti colla base angoli corrispondenti uguali (ad un prescelto ω), e per ulteriore lato $P'Q'$ l'arco di linea di equidistanza PP' (obliqua secondo ω) da PQ . Allora la curvatura K della superficie è espressa da

$$K = \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2},$$

Δ essendo l'area del quadrilatero.

Lo stesso teorema, quando il quadrilatero $PQP'Q'$ sia infinitesimo, vale pure per una superficie a curvatura variabile.

OSSERVAZIONE. — Riferendoci ancora ad una superficie a curvatura variabile, è opportuno porre in rilievo come la circostanza che alla soprabase di un parallelogrammoide geodetico infinitesimo, si possa sostituire un arco di linea di equidistanza, senza che perciò cessi di valere l'espressione limite $\frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}$ della curvatura, non è legata alla speciale natura dell'arco $P'Q'$ con cui si completa il parallelogrammoide. Il LEVI-CIVITA ha infatti osservato che *come soprabase del parallelogrammoide si può prendere un arco arbitrario, congiungente i vertici P' , Q'* . Si sottintende, naturalmente, che la linea $P'Q'$, sopra cui si conta quest'arco, resti ben determinata, durante la contrazione del quadrilatero $PQP'Q'$, e ch'essa continui ad avere per limite la geodetica PQ .

Questo complemento può stabilirsi agevolmente nel modo che segue.

Se a' è la lunghezza dell'arco geodetico $P'Q'$ ed l la lunghezza di un altro arco, situato sopra una linea ben definita, congiungente P' , Q' , designando con m la lunghezza del segmento rettilineo $P'Q'$, si ha, a meno di quantità del 4° ordine:

$$l = m + \frac{m^3}{24 R^2}, \quad m = a' - \frac{a'^3}{24 R'^2},$$

ove $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$ son le flessioni rispettive, in P' , degli archi l , a' ¹⁰⁾.

Ne deriva, sempre fino al 3° ordine inclusivo:

$$l = a' + \frac{a'^3}{24} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2} \right).$$

Ora, quando il parallelogrammoide si contrae tendendo a P , poichè le due linee considerate, pei punti P' , Q' , hanno ambedue per limite la geodetica prefissata PQ , le flessioni $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$ tendon verso lo stesso limite, e la differenza $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}$ risulta perciò infinitesima. Ne segue che la differenza $l - a'$ è del 4° ordine e la differenza $l^2 - a'^2$ del 5° ordine.

Nel calcolo del limite di $\frac{PQ^2 - a'^2}{\Delta^2}$, si può pertanto sostituire l^2 ad a'^2 ; che è quanto avevamo affermato.

9. *Quadrilateri di SACCHERI, di LAMBERT, di RIEMANN. Espressioni della curvatura ad essi inerenti.* — Quando si tratti d'una superficie a curvatura costante, un parallelogrammoide geodetico rettangolo di LEVI-CIVITA, riducesi alla figura fondamentale della geometria piana di SACCHERI, che è appunto un quadrilatero birettangolo isoscele ¹¹⁾.

Anche la figura fondamentale della geometria piana di LAMBERT, che è un quadrilatero trirettangolo ¹²⁾, dà luogo, sopra una superficie S , a curvatura costante o variabile, alla stessa espressione della curvatura, cui si perviene col parallelogrammoide di LEVI-CIVITA.

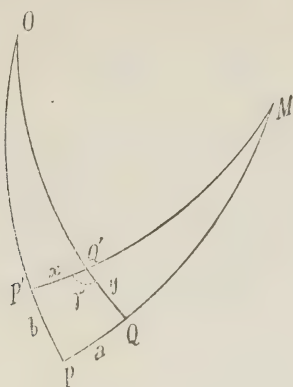
Per vederlo, possiamo, al solito, assimilare l'intorno di un punto P , ove la nostra superficie presenti la curvatura K , ad un intorno sferico di raggio $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$. Un quadrilatero $PQP'Q'$ di LAMBERT risulta allora costituito da un circolo massimo PQ , che

¹⁰⁾ Per l'espressione della differenza tra un arco e la relativa corda ved. per es. G. HUMBERT, *Cours d'Analyse* (Paris, Gauthier-Villars, 1903), t. I, p. 401. La stessa espressione vale evidentemente qualunque sia la dimensione dello spazio euclideo in cui la superficie è immersa.

¹¹⁾ Cfr. per es. R. BONOLA, *La geometria non-euclidea* (Bologna, Zanichelli, 1906), p. 21.

¹²⁾ BONOLA, loc. cit., p. 39.

si assumerà come equatore, da due meridiani PP' , QQ' e da un circolo massimo



(Fig. 3).

$P'Q'$, normale al meridiano PP' in P' ed appoggiato in Q' al meridiano QQ' ¹³).

Detto O quello dei due poli dell'equatore PQ , che trovasi dalla stessa banda del quadrilatero, M il polo del circolo massimo PP' che trovasi dalla stessa parte del quadrilatero, e posto $PQ = a$, $PP' = b$, $P'Q' = x$, $QQ' = y$, il teorema dei seni, applicato al triangolo $OP'Q'$, rettangolo in P' , porge:

$$\cos \frac{y}{R} \sin \gamma = \cos \frac{b}{R}, \quad \cos \frac{y}{R} \sin \frac{a}{R} = \sin \frac{x}{R},$$

ove γ denota il quarto angolo del quadrilatero di LAMBERT; e similmente il triangolo MQQ' , rettangolo in Q , dà:

$$\cos \frac{x}{R} \sin \gamma = \cos \frac{a}{R}.$$

Eliminando fra queste $\sin \gamma$ e $\cos \frac{y}{R}$, s'ottiene:

$$\text{tang} \frac{x}{R} = \text{tang} \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R},$$

dalla quale, quadrando e sostituendo alle linee trigonometriche i loro sviluppi in serie, si trae, a meno di quantità del 5° ordine:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{2x^4}{3R^4} = \left(\frac{a^2}{R^2} + \frac{2a^4}{3R^4} \right) \left(1 - \frac{b^2}{R^2} \right),$$

od anche:

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2 b^2}{R^2} - \frac{2(a^4 - x^4)}{3R^2}.$$

¹³) Si sottintende che, delle due intersezioni di ciascuno dei circoli massimi considerati, si sceglie quella che appartiene all'intorno di P .

Questa prova che $a^2 - x^2$ è del 4° ordine e che $a^4 - x^4 = (a^2 - x^2)(a^2 + x^2)$ è del 6° ordine. Si potrà perciò scrivere, a meno di quantità del 5° ordine:

$$\frac{a^2 - x^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{R^2} = K.$$

È dunque vero che il quadrilatero di LAMBERT dà luogo alla stessa espressione della curvatura a cui si perviene mediante il quadrilatero di SACCHERI — LEVI-CIVITA.

Un'altra espressione notevole della curvatura, s'ottiene mediante un quadrilatero di RIEMANN. Chiamiamo così un quadrilatero $PQ P' Q'$ che, sopra una superficie qualunque S , s'ottenga come trasformato di un parallelogrammo, col vertice in P , appartenente al piano S_0 , ivi tangente ad S , allorquando si deforma S_0 , fino a portarlo a coincidere con S , nel modo indicato al n° 2.

Designata con a la lunghezza dell'arco geodetico PQ e con b la lunghezza dell'arco geodetico PP' , gli altri due lati QQ' , $P'Q'$ del quadrilatero di RIEMANN, stanno rispettivamente sulle linee $u = a$, $v = b$ di un sistema di coordinate cartesiane curvilinee, avente per assi $v = 0$, $u = 0$ le geodetiche PQ , PP' (n° 2).

La ragione della denominazione adottata sta in ciò: che il calcolo della curvatura d'una superficie [o d'una varietà (ved. il n° 10)] accennato dal RIEMANN nella sua celebre Memoria sui fondamenti della geometria, si riduce alla valutazione del rapporto $\frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}$, ove Δ è l'area del quadrilatero $PQ P' Q'$, supposto infinitesimo ¹⁴).

Prese, come sopra si è detto, le geodetiche PQ , PP' a linee $v = 0$, $u = 0$, di un sistema di coordinate cartesiane curvilinee, nel caso d'una superficie, la valutazione di questo rapporto si fa immediatamente partendo dall'espressione del ds^2 in coordinate cartesiane (n° 1). Poichè il punto P' ha le coordinate $(0, b)$ e Q' le coordinate (a, b) , si avrà:

$$P'Q'^2 = E'(0, b)a^2,$$

con

$$E' = 1 + \left(\frac{G}{\rho^2} - 1 \right) \sin^2 \theta.$$

Le coordinate polari del punto P' sono $\rho = b$, $\theta = \omega$, ove ω è l'angolo delle PQ , PP' : cosicchè, tenendo presente lo sviluppo di G nell'intorno di $\rho = 0$, si avrà, a meno di termini del 5° ordine:

$$P'Q'^2 = \left(1 - \frac{K}{3} b^2 \sin^2 \omega \right) a^2,$$

K essendo la curvatura di S in P ; e quindi:

$$PQ^2 - P'Q'^2 = \frac{K}{3} a^2 b^2 \sin^2 \omega.$$

¹⁴) Per la citazione dettagliata dei passi corrispondenti dalle Gesammelte Werke del RIEMANN, nonchè per la dimostrazione del fatto che effettivamente la definizione del RIEMANN può presentarsi sotto questa forma, ved. il n° 10 del presente lavoro.

E siccome infine, a meno d'infinitesimi del 5° ordine, $a^2 b^2 \sin^2 \omega$ uguaglia Δ^2 , così viene, a meno d'infinitesimi del 1° ordine:

$$\frac{P Q^2 - P' Q'^2}{\Delta^2} = \frac{1}{3} K,$$

che è la formula di RIEMANN per le superficie.

Possiamo enunciare, concludendo:

Se si considera l'intorno di un punto P d'una superficie qualunque S , come proveniente dalla deformazione d'un intorno piano, tessuto con un fascio di fibre rettilinee inestendibili e con un fascio di fibre circolari elastiche, la curvatura totale K di S in P , risulta espressa da

$$K = 3 \frac{P Q^2 - P' Q'^2}{\Delta^2},$$

essendo $P Q P' Q'$ un quadrilatero infinitesimo, d'area Δ , tracciato su S , proveniente dalla deformazione di un parallelogrammo col vertice in P .

OSSERVAZIONE. — Un altro quadrilatero $P Q P' Q'$, la cui considerazione si presenta spontanea sopra una superficie S , è quello costituito da due geodetiche $P Q$, $P P'$, formanti in P l'angolo ω , e da due linee $P' Q'$, $Q Q'$ di equidistanza obliqua secondo ω , dalle due geodetiche.

A meno di quantità del 4° ordine, rispetto alle lunghezze dei lati d'un tal quadrilatero, possiamo ancora assimilare la nostra superficie ad una sfera (n° 5). Il quadrilatero $P Q P' Q'$ è allora formato da due cerchi massimi $P Q$, $P P'$ e da due cerchi minori $P' Q'$, $Q Q'$ ad essi rispettivamente paralleli.

Supporremo, per semplicità, $\omega = \frac{\pi}{2}$. Posto $P Q = a$, $P P' = b$, $P' Q' = x$, si osservi che i punti Q , Q' , situati sopra un piano parallelo a quello del circolo massimo $P P'$, sono equidistanti da quest'ultimo piano; sicchè i seni degli archi $P Q$, $P' Q'$, le cui rispettive misure in radianti sono $\frac{a}{R}$, $\frac{x}{R \cos \lambda}$ — ove $\lambda = \frac{b}{R}$ è la latitudine del parallelo $P' Q'$ rispetto all'equatore $P Q$ — risultan inversamente proporzionali ai raggi dei rispettivi cerchi. Si ha cioè:

$$(15) \quad R \cos \frac{b}{R} \sin \frac{x}{R \cos \frac{b}{R}} = R \sin \frac{a}{R},$$

donde, a meno di termini del 5° ordine (sulla sfera):

$$x - \frac{x^3}{6 R^2} = a - \frac{a^3}{6 R^2},$$

ossia:

$$(16) \quad x - a = \frac{x^3 - a^3}{6 R^2}.$$

Questa prova anzitutto che la differenza $x - a$ è del 3° ordine (almeno) e quindi che $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ è del 5° ordine.

E ritornando ancora una volta alla (16), la quale vale, sulla sfera, fino al 4° ordine inclusivo, se ne deduce che *sulla sfera*, $x - a$ è del 5° ordine.

Ma sulla superficie S qualunque, da cui siano partiti, si può affermar soltanto che la differenza $x - a$ è del 4° ordine, perchè è appunto questo l'ordine di approssimazione nel quale, date le nostre premesse, ci è lecito di scriver la (15).

Concludendo:

Il quadrilatero racchiuso sopra una superficie qualunque S , da due geodetiche perpendicolari e da due linee ad esse parallele (linee di equidistanza ortogonale), a meno di quantità del 4° ordine, ha i lati opposti uguali.

Pertanto, nell'ordine di approssimazione considerato, un tal quadrilatero si rassomiglia ad un rettangolo piano più di ogni altro quadrilatero della superficie, che, come quelli di SACCHERI, di LAMBERT, di RIEMANN, conservi qualcuna delle proprietà caratteristiche d'un rettangolo piano. La cosa, come si vedrebbe senza difficoltà, vale anche quando le due geodetiche PQ , PP' si tagliano sotto un angolo ω , non retto: il quadrilatero $PQP'Q'$ racchiuso dalle PQ , PP' e da due linee di equidistanza secondo ω , dalle due date geodetiche, si rassomiglia cioè ad un parallelogrammo piano più di ogni altro quadrilatero di S .

Ritorniamo per poco al quadrilatero trirettangolo $PQP'Q'$, d'area Δ , racchiuso, sopra una superficie S , da due geodetiche ortogonali PQ , PP' e da due linee ad esse parallele. Assimiliamo S ad una sfera e, indicato con γ il quarto angolo del quadrilatero, fissiamo l'attenzione sul triedro $Q'(MNO)$, avente per spigoli $Q'M$, $Q'N$, le tangenti rispettive in Q' ai cerchi minori $Q'P'$, $Q'Q$ e per spigolo $Q'O$, l'intersezione dei piani di questi cerchi. Le faccie $MQ'O$, $NQ'O$ uguaglian rispettivamente gli angoli sottesi dagli archi $Q'P'$, $Q'Q$, aumentati di $\frac{\pi}{2}$. Per la (15), si avrà pertanto:

$$\cos MQ'O = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{R \cos \frac{a}{R}} \right) = - \frac{\sin \frac{a}{R}}{\cos \frac{a}{R}};$$

e similmente:

$$\cos NQ'O = - \frac{\sin \frac{b}{R}}{\cos \frac{a}{R}}.$$

Tenendo ora conto che il diedro opposto alla faccia $MQ'N = \gamma$, è retto, si può scrivere:

$$\cos \gamma = \cos MQ'O \cos NQ'O = \tan \frac{a}{R} \tan \frac{b}{R},$$

donde si trae, a meno di quantità del 4° ordine, sulla sfera:

$$\cos \gamma = \frac{ab}{R^2}.$$

Ma poichè la penultima relazione vale su S a meno di quantità del 3° ordine, così può scriversi in definitiva, a meno del 1° ordine:

$$K = \frac{\frac{\pi}{2} - \gamma}{\Delta}.$$

Dunque: *Detti γ il quarto angolo e Δ l'area di un quadrilatero rettangolo infinitesimo, come quello dell'enunciato precedente, la curvatura di S nel vertice opposto a γ è espressa da*

$$K = \frac{\frac{\pi}{2} - \gamma}{\Delta}.$$

Un'espressione analoga s'ottiene da un quadrilatero trirettangolo geodetico (di LAMBERT), decomponendolo con una diagonale in due triangoli geodetici e applicando la formula di GAUSS (n° 6). Viene così:

$$K = \frac{\gamma - \frac{\pi}{2}}{\Delta},$$

ove γ è ancora il quarto angolo del quadrilatero d'area Δ e K la curvatura nel vertice opposto.

È superfluo di avvertire che in questo ed in tutti gli altri enunciati, soltanto per comodità ci si riferisce ad un punto fisso dell'area mediante cui si definisce la curvatura, giacchè in realtà i valori di K nei diversi punti dell'area sono eguali, a meno d'infinitesimi del 1° ordine.

CAPITOLO II.

Sulla curvatura riemanniana d'una varietà e sul parallelismo fra direzioni introdotto dal LEVI-CIVITA.

10. *Curvatura d'una varietà secondo la definizione originaria del RIEMANN. Interpretazione geometrica.* — Le precedenti considerazioni conducono ad una ricostruzione geometrica della teoria della curvatura d'una varietà, secondo il RIEMANN. All'uopo, fissiamo sopra una varietà V_n , a metrica qualsiasi, una superficie geodetica σ ¹⁵⁾, avente

¹⁵⁾ Cioè il luogo delle geodetiche spiccate da P secondo direzioni appartenenti a un dato fascio. Cfr. per es. BIANCHI, loc. cit., vol. I, pag. 339.

il centro in un punto P di V_n , individuata da due geodetiche distinte PQ, PP' . La curvatura di V_n , secondo la giacitura con cui σ esce da P , è definita dal RIEMANN mediante uno di quei quadrilateri, tracciati sopra σ , che già nel n° 9 chiamammo appunto quadrilateri di RIEMANN.

Il RIEMANN procede infatti così ¹⁶⁾:

A coordinate di un punto M variabile su V_n , egli prende anzitutto la distanza geodetica $\rho = PM$ ed i parametri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ della direzione con cui la geodetica PM esce da P (coordinate geodetiche polari). Introduce quindi su V_n le coordinate cartesiane curvilinee u_1, u_2, \dots, u_n , definite dalle:

$$u_1 = \rho \alpha_1, \quad u_2 = \rho \alpha_2, \quad \dots, \quad u_n = \rho \alpha_n,$$

colla condizione ulteriore — diretta ad abbreviare i calcoli — che sia

$$(17) \quad \rho^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2.$$

Le coordinate cartesiane ch'egli considera, son cioè ortogonali; noi, non avendo nel seguito da sviluppar calcoli, potremo anche omettere la condizione (17), lasciando che le direzioni con cui le linee (geodetiche) coordinate escon da P , sieno comunque inclinate (purchè beninteso fra loro linearmente indipendenti) ¹⁷⁾.

Fissati due punti $Q(u_1 = a_1, \dots, u_n = a_n)$, $P'(u_1 = b_1, \dots, u_n = b_n)$ infinitamente vicini a P , secondo direzioni distinte, il RIEMANN considera il punto Q' di coordinate $a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n$, e valuta il quadrato dell'elemento lineare $P'Q'$, giungendo alla conclusione che il rapporto fra la differenza $P'Q'^2 - PQ^2$ e il quadrato dell'area del triangolo $P'PQ$, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al primo, uguaglia la curvatura gaussiana in P della superficie geodetica σ , contenente le direzioni $(PQ)(PP')$, moltiplicata pel coefficiente $-\frac{4}{3}$ ¹⁸⁾.

Noi possiamo ormai pervenire rapidamente, per via geometrica semplice, alla conclusione del RIEMANN.

¹⁶⁾ *Ueber die Hypothesen welche die Geometrie zu Grunde liegen* (Gesammelte Mathematische Werke, Leipzig, Teubner, 1876, pp. 254-269), p. 261. Ved. anche il Commento del WEBER al frammento postumo n° XXII (p. 384).

¹⁷⁾ Indicata con u_1 la linea coordinata, uscente da P , lungo cui son costanti le u_2, \dots, u_n ; con u_2 quella lungo cui son costanti le u_1, u_3, \dots, u_n , etc; si ha in generale

$$\rho = \sum_i u_i^2 + 2 \sum_{i,j} u_i u_j \cos(u_i u_j).$$

L'angolo che la geodetica $l=PM$ forma in P colla linea u_i , è espresso da $\cos(lu_i) = \sum_j \alpha_j \cos(u_i u_j)$.

Tutto ciò deriva ovviamente dalla formola che definisce il coseno dell'angolo di due direzioni sopra V_n . Cfr. ad es. BIANCHI, loc. cit. vol. I, pag. 331.

¹⁸⁾ Vedi le riflessioni critiche del LEVI-CIVITA (alla fine di M .) sul calcolo accennato dal RIEMANN e sviluppato più ampiamente dal WEBER.

Considerato invero, nello spazio euclideo S_N — di dimensione N abbastanza grande — ove la V_n può sempre supporre immersa, lo spazio euclideo S_n , tangente a V_n in P , a somiglianza di quanto già facemmo per le superficie nei n° 2 e 9, assumeremo in S_n , come assi di un sistema cartesiano $(u_1^{(o)}, u_2^{(o)}, \dots, u_n^{(o)})$, le tangenti in P alle linee u_1, u_2, \dots, u_n del sistema cartesiano già definito entro V_n , ed associeremo due punti di S_n e di V_n , che abbian le stesse coordinate ($u_i^{(o)} = u_i$).

La corrispondenza si realizza al solito riguardando S_n come costituito da fibre rettilinee inestendibili, uscenti da P , e da ipersfere elastiche, ad $n - 1$ dimensioni, di centro P ; ed applicando S_n su V_n in modo che resti fermo P e il relativo intorno di 1° ordine. Mediante la corrispondenza considerata, un piano σ_o di S_n uscente da P , concepito come sostegno di un fascio di raggi di centro P , vien trasformato in una superficie geodetica σ di V_n , concepita come sostegno di un fascio di linee geodetiche uscenti da P e tangenti al piano σ_o .

Ai punti Q, P' di V_n corrispondono in S_n , i punti Q_o, P'_o , aventi le stesse coordinate $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$ [nel caso in esame Q_o, P'_o coincidono rispettivamente con Q, P' , perchè questi si son supposti infinitamente vicini a P], e al punto Q' corrisponde il punto $Q'_o(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$. Ora, le rette $PP'_o, Q_oQ'_o$, essendo rappresentate, in coordinate correnti $u_1^{(o)}, \dots, u_n^{(o)}$, dalle equazioni rispettive:

$$\frac{u_1^{(o)}}{b_1} = \frac{u_2^{(o)}}{b_2} = \dots = \frac{u_n^{(o)}}{b_n}$$

$$\frac{u_1^{(o)} - a_1}{b_1} = \frac{u_2^{(o)} - a_2}{b_2} = \dots = \frac{u_n^{(o)} - a_n}{b_n},$$

son parallele; e così son parallele le rette $PQ_o, P'_oQ'_o$ rappresentate dalle:

$$\frac{u_1^{(o)}}{a_1} = \frac{u_2^{(o)}}{a_2} = \dots = \frac{u_n^{(o)}}{a_n}$$

$$\frac{u_1^{(o)} - b_1}{a_1} = \frac{u_2^{(o)} - b_2}{a_2} = \dots = \frac{u_n^{(o)} - b_n}{a_n}.$$

Dunque la figura $PQ_oP'_oQ'_o$ di S_n , è un parallelogrammo. Mediante la corrispondenza fra S_n e V_n , il piano σ_o di questo parallelogrammo, si muta, come s'è detto, nella superficie geodetica σ definita dalle due direzioni $(PQ), (PP')$, ed il parallelogrammo si muta nel quadrilatero $PQP'Q'$ di σ , il quale risulta così un quadrilatero riemanniano, secondo la definizione del n° 9.

Resta pertanto provato che, indicata con Δ l'area di $PQP'Q'$ e con K la curvatura gaussiana di σ in P , si ha:

$$\frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2} = \frac{1}{3} K,$$

e questa è appunto, salvo la forma, l'affermazione del RIEMANN.

Si conclude che:

Data una varietà V_n , a metrica qualsiasi, la curvatura K di V_n in un punto P , secondo un'assegnata giacitura, si può calcolare nel modo seguente:

« Sul piano σ_0 , tangente in P alla prefissata giacitura, si costruisca un parallelogrammo infinitesimo con un vertice in P ; e concepito il piano σ_0 come inestendibile « lungo le rette uscenti da P , e come elastico sulle direzioni a queste ortogonali, si deformi σ_0 , lasciando fermo l'intorno di 1° ordine di P , finchè le fibre inestendibili di σ_0 « si distendano su altrettante geodetiche di V_n .

« Indicato con $PQ P' Q'$ il quadrilatero di V_n , deformato del parallelogrammo di « σ_0 , viene

$$K = 3 \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2},$$

« ove Δ è l'area del suddetto quadrilatero ».

II. Definizione geometrica intrinseca del parallelismo di LEVI-CIVITA. Equazioni differenziali relative. — Per arrivar geometricamente, in modo semplice, alla definizione della curvatura d'una V_n , mediante un parallelogrammoide di LEVI-CIVITA, indicheremo anzitutto una definizione geometrica intrinseca del parallelismo fra direzioni, la quale ci offrirà subito il modo di ricondurre tutto alle superficie (geodetiche) tracciate in V_n .

Dati sopra V_n due punti A, A_1 infinitamente vicini, ed una direzione (ξ) uscente da A ed appartenente a V_n , la direzione (ξ_1) parallela a (ξ) , condotta per A_1 , verrà definita nel modo seguente:

Si consideri la superficie geodetica σ , di centro A , individuata dalla giacitura che contiene le direzioni (ξ) ed (AA_1) : allora la direzione (ξ_1) è quella che sopra σ forma colla geodetica AA_1 un angolo (corrispondente) uguale a quello formato da (ξ) , (AA_1) . S'intende qui incluso il caso in cui (ξ) tocchi in A la geodetica AA_1 : soltanto in questo caso la σ non è individuata, potendosi scegliere fra le infinite superficie geodetiche di centro A , contenenti la geodetica AA_1 .

Conservando le notazioni del LEVI-CIVITA, indicheremo con $\xi^{(i)}$ i parametri della direzione (ξ) entro l'ambiente V_n , con x'_i i parametri della direzione (AA_1) , con $x_i^{(0)}$ le coordinate di A . Si avrà allora la rappresentazione parametrica:

$$(18) \quad x_i = x_i^{(0)} + x'_i u + \xi^{(i)} v - \frac{1}{2} \sum_{j,l} \left\{ \begin{matrix} j,l \\ i \end{matrix} \right\} (x'_j u + \xi^{(j)} v) (x'_l u + \xi^{(l)} v) + \dots$$

della superficie σ nell'intorno di A ¹⁹⁾, ove $\left\{ \begin{matrix} j,l \\ i \end{matrix} \right\}$ sono i soliti simboli di CHRISTOFFEL, relativi a V_n , e le coordinate curvilinee u, v di un punto P di σ , son definite da *

$$(19) \quad u = \rho \alpha, \quad v = \rho \beta,$$

essendo ρ la distanza geodetica AP ed $\alpha x'_i + \beta \xi^{(i)}$ i parametri, entro V_n , della direzione con cui la geodetica AP esce da A .

¹⁹⁾ Cfr. BIANCHI, loc. cit., vol. I, pag. 339.

Indichiamo con ω l'angolo, fra o e π , delle direzioni (AA_1) , (ξ) , con θ l'angolo, fra o e π , che (AA_1) forma con una direzione variabile $\alpha x'_i + \beta \xi^{(i)}$. Allora, tenendo presente la formola, già citata [alla nota (17)], che definisce il coseno dell'angolo di due direzioni, entro V_n , si ottengono subito le relazioni:

$$\cos \theta = \alpha + \beta \cos \omega, \quad \cos(\omega - \theta) = \alpha \cos \omega + \beta,$$

donde si trae:

$$\alpha = \frac{\sin(\omega - \theta)}{\sin \omega}, \quad \beta = \frac{\sin \theta}{\sin \omega}.$$

Le u, v coincidono pertanto sopra σ colle coordinate cartesiane curvilinee già considerate nel n° 1. Pel ds^2 di σ si ha perciò l'espressione (6) del n° 1.

Ne deriva che l'angolo γ , formato in un punto P della geodetica AA_1 ($\theta = 0$), dalla direzione positiva di questa linea, colla direzione positiva della linea $u = \text{cost.}$, uscente da P , è dato da ²⁰⁾:

$$\cos \gamma = \frac{F'}{\sqrt{E'G'}} = \frac{\cos \omega}{1/\sqrt{1 + \left(\frac{\bar{G}}{\rho^2} - 1\right) \sin^2 \omega}},$$

ove con \bar{G} s'è indicata la funzione G per $\theta = 0$.

La precedente, mediante la formula del binomio, può anche scriversi:

$$\cos \gamma = \cos \omega \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{G}}{\rho^2} - 1 \right) \sin^2 \omega + \dots \right].$$

Ricordando lo sviluppo di \bar{G} secondo le potenze ascendenti di ρ , nell'intorno di $\rho = 0$ (n° 1), si trae subito:

$$\cos \gamma = \cos \omega (1 + \mu \rho^2 + \dots) \quad (\mu \text{ costante}),$$

la quale prova che, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al primo, la direzione con cui esce da A_1 la relativa linea $u = \text{cost.}$, coincide con (ξ_1) .

Pertanto le costanti superficiali, in A_1 , della suddetta linea $u = \text{cost.}$, s'identificano colle costanti superficiali della direzione (ξ) , le quali, a norma delle (19), sono:

$$\left(\frac{du}{ds} \right)_A = 0, \quad \left(\frac{dv}{ds} \right)_A = 1,$$

ove ds denota l'elemento lineare sulla $u = 0$ e φ_A il valore in A di una generica funzione φ del punto mobile su σ .

Sicchè, sopra la linea $u = \text{cost.}$ che esce da A_1 sarà $\left(\frac{dv}{ds'} \right)_{A_1} = 1$, ds' indicando l'elemento lineare su detta linea.

²⁰⁾ BIANCHI, loc. cit., vol. I, pag. 195.

Le costanti della direzione (ξ_i) , entro V_n , saranno perciò date da:

$$\xi_i^{(i)} = \left(\frac{dx_i}{ds'} \right)_{A_i} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial v} \right)_{A_i} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial v} \right)_A + du \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} \right)_A,$$

in quanto sulla geodetica AA_i ($\theta=0$), l'arco, contato da A , s'identifica colla variabile u .

Ora dalle (18), derivando e ponendo, a derivazione eseguita, $u=v=0$, si traggono le relazioni:

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial v} \right)_A = \xi_i^{(i)}, \quad \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} \right)_A = - \sum_{jl} \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} \xi_i^{(l)} x'_j,$$

Si hanno dunque, in definitiva, le

$$\xi_i^{(i)} = \xi_i^{(i)} - du \sum_{jl} \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} \xi_i^{(l)} x'_j,$$

le quali coincidono colle relazioni differenziali (I_a) di M .

Resta così provata l'equivalenza della nostra definizione con quella del LEVI-CIVITA, e vengono di più ritrovate, con sole considerazioni intrinseche, le equazioni differenziali che reggono il problema del parallelismo.

12. Parallelismo fra direzioni negli spazî a curvatura costante. — Il teorema d'esistenza pel sistema

$$(20) \quad \frac{d\xi_i^{(i)}}{ds} = - \sum_{jl} \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} \xi_i^{(l)} \frac{dx_j}{ds},$$

che esprime il modo di variare di una direzione parallela ad una data (ξ_o) , lungo un assegnato cammino C — sul quale ds è l'elemento lineare — s'intepreta geometricamente nel senso che la varietà delle ∞^1 direzioni integrali definite da (ξ_o) , può esser determinata a partire da una qualunque di esse, e quindi che la *relazione di parallelismo, lungo un dato cammino, è simmetrica e transitiva*.

Quando il cammino C sia geodetico, la definizione da noi data, di direzioni parallele uscenti dai punti A, A_i , infinitamente vicini su C , ha senso anche allorchè i punti A, A_i sieno su C a distanza finita, giacchè allora esiste una superficie geodetica σ , di centro A , contenente C e la direzione (ξ) spiccata da A .

Ma non è detto che la relazione di parallelismo che così s'ottiene fra le due direzioni aventi le origini a distanza finita, coincida con quella del LEVI-CIVITA: quel che è certo è soltanto che le due relazioni coincidono a meno d'infinitesimi d'ordine superiore, rispetto alla distanza geodetica AA_i . È chiaro che la coincidenza in questione avrebbe luogo anche al finito, qualora la relazione di parallelismo, secondo la nostra definizione, fosse simmetrica rispetto a due direzioni $(\xi)(\xi_i)$ spiccate da punti A, A_i a distanza finita; qualora cioè la superficie geodetica σ_i , di centro A_i , passante per la geodetica C e per la direzione (ξ_i) , toccasse di conseguenza la σ nel punto A , come di fatto la σ tocca σ_i in A_i .

Il parallelismo del LEVI-CIVITA può dunque definirsi intrinsecamente *in termini finiti*, nel modo da noi indicato, solo quando la V_n goda della proprietà che « per ogni coppia di superficie geodetiche, aventi i centri sopra una medesima geodetica C , il contatto in un punto di C , porti di conseguenza il contatto lungo tutta la curva ».

In questo caso le equazioni differenziali (20), che reggono il problema del parallelismo, risultan senz'altro integrate pei cammini geodetici, non appena sieno integrate le equazioni differenziali delle geodetiche.

Questa circostanza si verifica ad esempio per gli spazi a curvatura costante: ciò risulta subito dal fatto che ogni punto d'una superficie geodetica appartenente ad un tale spazio V_n , può esser assunto come centro di un fascio di geodetiche di V_n , tracciate sulla superficie (in quanto a questa appartiene ogni geodetica che la incontri in due punti), sicchè due superficie geodetiche che si tocchino in un punto coincidono. Dunque:

Negli spazi a curvatura costante, il parallelismo di due direzioni (ξ), (ξ_1), situate a distanza finita, e derivanti per continuità l'una dall'altra, lungo un cammino geodetico C , si riduce a ciò: che le (ξ), (ξ_1) formano con C angoli corrispondenti uguali sopra una superficie geodetica che le contenga.

Una proprietà sostanzialmente equivalente, sempre per gli spazi a curvatura costante, trovasi già nel § 10 di M .

13. Le proprietà fondamentali del parallelismo fra direzioni. — Nella sua Memoria, il LEVI-CIVITA dimostra, per via analitica, le due proprietà fondamentali seguenti della relazione di parallelismo:

a) La direzione (α) parallela in un punto P ad una direzione data (α_0), uscente da P_0 , dipende in generale dal cammino con cui si va da P_0 a P . L'indipendenza dal cammino caratterizza le varietà euclidee.

b) Due direzioni uscenti da P_0 formano un angolo uguale a quello formato dalle direzioni ad esse parallele per P , e ciò qualunque sia il cammino da P_0 a P .

Ecco come si possono stabilire queste due proprietà, con semplici ragionamenti geometrici.

Suppongasi che nella nostra V_n il parallelismo di due direzioni sia indipendente dal cammino, o, in altre parole, che « due direzioni parallele ad una terza sieno sempre parallele fra di loro ». Consideriamo allora, entro V_n , un punto P_0 ed una geodetica C_0 uscente da P_0 . Tracciamo quindi la geodetica C , che esce da un altro punto P , colla direzione parallela a quella di C_0 in P_0 . Due direzioni appartenenti a C_0 , C , ed aventi del resto origini arbitrarie, sono, per la definizione stessa, parallele alle direzioni di C_0 , C in P_0 , P , e quindi, per l'ammissa transitività, parallele tra di loro. Ne deriva che ogni geodetica che incontri C_0 , C nei punti M_0 , M , forma ivi colle due geodetiche angoli corrispondenti uguali.

Siamo dunque nel caso euclideo e si conclude che:

La relazione di parallelismo fra direzioni è transitiva, soltanto nel caso euclideo.

Passiamo alla proprietà b). Fissato un cammino C dal punto P_0 al punto P di V_n , e dette a_0 , a le rette tangenti a C in P_0 , P , entro lo spazio euclideo S_N in cui V_n è immersa, fra le stelle formate dalle tangenti a V_n in P_0 , P , nasce una corrispondenza biunivoca π , ove si chiamino omologhe due tangenti t_0 , t , che escano da P_0 , P con direzioni parallele rispetto a C ; talchè sarà intanto $\widehat{ta} = \widehat{t_0a_0}$.

Tale corrispondenza π , attesa la linearità delle equazioni differenziali (20), che as-

sicura esser lineare la dipendenza degli integrali $\xi^{(i)}$ dai loro valori iniziali, è un'omografia. Dobbiamo provare che, in π , a due rette b_o, c_o della stella (P_o) — entro lo S_n euclideo tangente a V_n in P_o — corrispondon due rette b, c della stella (P) — entro lo S_n analogo — tali che $\widehat{b_o c_o} = \widehat{bc}$.

Dal momento che lo $S_3 a_o b_o c_o$ si muta per la π nello $S_3 abc$, così basterà provare che un'omografia π fra due stelle $(P_o), (P)$ di due S_3 euclidei, è una congruenza, quando raggi corrispondenti formano angoli eguali con due raggi fissi a_o, a di $(P_o), (P)$.

All'uopo si osservi che ad un cono rotondo Γ_o , avente per asse a_o , la π fa corrispondere un cono rotondo Γ , di eguale apertura, avente per asse a : l'involuzione dei piani diametrali coniugati rispetto a Γ_o , che è l'involuzione degli angoli retti nel fascio di piani (a_o) , vien dunque mutata nell'involuzione analoga rispetto a Γ , cioè nell'involuzione degli angoli retti del fascio di piani (a) . Tanto basta per concludere che la π subordina una congruenza fra i fasci di piani $(a_o), (a)$; donde segue l'eguaglianza dei due triedri $a_o b_o c_o, abc$ (che hanno due faccie e il diedro compreso rispettivamente uguali) e quindi $\widehat{b_o c_o} = \widehat{bc}$ ²¹). Si può pertanto enunciare:

Fissati due punti P_o, P della varietà V_n ed un cammino qualunque C , che li congiunga, la corrispondenza biunivoca fra le direzioni, uscenti da P_o, P , parallele rispetto al cammino C , è una congruenza.

Nel qual enunciato resta inclusa anche la proposizione stabilita in $M.$ dal LEVI-CIVITA, alla fine del § 6.

14. Espressione della curvatura riemanniana d'una varietà mediante un parallelogrammoide. — Il LEVI-CIVITA ha definito la curvatura d'una varietà V_n in un punto P , secondo un'assegnata giacitura, individuata dalle direzioni di due geodetiche distinte PQ, PP' , spiccate da P , mediante l'espressione $\frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}$ relativa ad un parallelogrammoide infinitesimo $PQP'Q'$ di base PQ , di soprabase $P'Q'$ e di area Δ .

La coincidenza di questa definizione colla definizione riemanniana si desume ormai a priori da ciò: che il parallelogrammoide $PQP'Q'$ appartiene alla superficie geodetica σ di centro P , determinata dalle due direzioni $(PQ), (PP')$.

E invero che il lato QQ' appartenga a σ segue senz'altro dal n° 11. Quanto al lato $P'Q'$, abbiamo già osservato (n° 8) ch'esso è arbitrario ²²): si può pertanto supporre, senza restrizione, che la soprabase $P'Q'$ appartenga essa pure a σ . Ne deriva che il valore dell'espressione $\frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2}$ relativa ad un parallelogrammoide geo-

²¹) Più brevemente si sarebbe potuto dire: la π fa corrispondere alle intersezioni del cono isotropo della stella (P_o) coi piani reali del fascio (a_o) , le generatrici analoghe del cono isotropo della stella (P) . Dunque il trasformato, mediante π , del primo cono isotropo, che è irriducibile, non può che coincidere col secondo; cioè π non può che essere una congruenza.

²²) Il ragionamento esposto nell'Osservazione del n° 8, vale evidentemente anche se il quadrilatero $PQP'Q'$ è immerso in una varietà V_n , anzichè in una superficie S . Basta all'uopo considerare le cose nello spazio euclideo S_N , cui V_n appartiene.

detico infinitesimo di V_n — ove per Δ si prenda una qualunque area avente per contorno il perimetro del quadrilatero e infinitesima con esso — coincide col valore dell'espressione stessa riferita ad un parallelogrammoide geodetico di σ , cioè (n° 8) colla curvatura totale di σ in P .

Resta così provata la coincidenza della definizione del LEVI-CIVITA con quella del RIEMANN; la qual coincidenza risulta in M . (§ 18) dalla verifica formale dell'egualianza delle corrispondenti espressioni della curvatura.

Padova, 5 febbraio 1917.

FRANCESCO SEVERI.

THE CHARACTERISTIC NUMBERS OF A REAL ALGEBRAIC PLANE CURVE.

J. L. Coolidge (Cambridge, Mass.).

Adunanza del 22 aprile 1917.

In the study of algebraic plane curves fundamental importance is attached to certain numbers, called PLÜCKER's numbers or characteristics, which are invariant when the curve is subjected to any projective transformation of the plane. In the present article we shall, for simplicity of statement, limit ourselves to those curves which have at most, point and tangent singularities of the second order. This limitation is one of form only, our main theorem deals with identities holding for all curves whatsoever. We shall denote the PLÜCKER characteristics by the following numbers

- n = the order of the curve
- m = the class of the curve
- p = the deficiency
- δ = the number of double points
- k = the number of cusps
- τ = the number of double tangents
- ι = the number of inflections

These numbers are connected by certain equations, called PLÜCKER's equations, in virtue of which, if the values of three be known, the others may always be expressed rationally in terms of them. There is no account taken of the distinction between real and imaginary in defining these numbers.

Suppose, however, that we are especially interested in a real curve. In trying to draw such a curve, what is of first importance is not the total number of double points or inflections, real or imaginary, but the number of real singularities of one sort or another. There is a certain arbitrariness in the choice of those real characteristics which are worthy of attention. We give here the list which we shall follow in the present article, and which certainly seems to include all that could be desired

- n' = the apparent order of the curve, i. e. the maximum number of real intersections with any one real line, multiple intersections counting according to their multiplicity
 m' = the apparent class of the curve, definition corresponding to above
 δ'_1 = the number of real double points, each lying on two real branches
 δ'_2 = the number of conjugate or isolated double points, each lying on two conjugate imaginary branches
 k' = the number of real cusps
 τ'_1 = the number of real double tangents
 τ'_2 = the number of conjugate or isolated double tangents
 ι' = the number of real inflections
 c' = the number of real circuits, open or closed.

Taking the two lists together we have sixteen characteristics. The first seven are connected by PLÜCKER's equations. Some of the first and some of the others are connected by a well known equation due to KLEIN, namely ¹⁾

$$m + k' + 2\delta'_2 = n + \iota' + 2\tau'_2.$$

This equation has been put into a particularly elegant shape by SCHUH in a to little known article ²⁾. SCHUH considers a point as singular if every line in the plane through it have more than one intersection with the curve at that point, or if, even though it be not singular in this sense, it is yet the point of contact of a singular tangent. Corresponding definitions can be given for singular tangents. The order of a singular point is the minimum number of intersections which a straight line through that point will have with the curve there. A similar definition will hold for the order of a singular tangent. This premised, SCHUH's equation reads

$$m + \sum \nu' = n + \sum \mu'.$$

In words: *The class of a curve plus the sum of the orders of all the real singular points is equal to the order plus the sum of the orders of all real singular tangents.*

This relation is more elegant in form than KLEIN's and is readily extended to include imaginary curves, and higher singularities. Curiously enough in the case of a real curve it reduces to KLEIN's equation by cancellation.

We come now, naturally, to the highly interesting question «Are there any other equations of this sort connecting real or PLÜCKER characteristics, not derivable from those already given?» There are, certainly, new relations in the case of special types of curves. For instance, in the case of a non-singular curve we easily find

$$\iota = 3\iota' + 6\tau'_2.$$

¹⁾ F. KLEIN, *Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve* [Mathematische Annalen, Bd. X (1876), pp. 199-209].

²⁾ F. SCHUH, *Eene realiteitsvergelijking voor bestaanbare en onbestaanbare vlakke krommen met hogere singulariteiten* [Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Verslag van de gewone Vergaderingen der wis-en natuurkundige Afdeling, t. XII (1903-1904), pp. 845-854].

This amounts to saying that in the case of a real non-singular curve, not more than one third of the inflections can be real. Various relations have been established for curves of low order, notably the fourth. There are also certain relations valid in the case of unicursal curves ³). With regard to the general question are there any other relations independent of these, valid for all curves, no pronouncement of a final sort has yet been forthcoming. JUEL seems to have believed that there were such, if we may judge by the following remark ⁴). «*Ich möchte noch hinzufügen dass die Formel (I), selbstverständlich, nicht als die einzig mögliche Relation zwischen den reellen Singularitäten einer ebenen algebraischen Kurve anzusehen ist*».

It is the object of the present paper to show that this opinion is not well founded by proving the following.

FUNDAMENTAL THEOREM. — *The only algebraic identities involving any combination of real or total singularities as here defined, which are valid for all real algebraic plane curves, are those which are deducible from the known equations of PLÜCKER and KLEIN.*

The proof is based upon the following.

ALGEBRAIC LEMMA. — *Given a polynomial in any number of variables, equal to zero. If it be possible to give to each variable in turn without altering the value of any of the others, a number of values greater than the degree of the polynomial with regard to that variable, then the polynomial is identically equal to zero.*

The lemma is certainly true in the case of a polynomial in one variable. Assume that it has been proved for one of $n - 1$ variables. Let us arrange according to the powers of the n th. variable. We have an equation in this variable with more roots than the degree allows. Hence the coefficients of each power of this variable vanish identically, for each is a polynomial in $n - 1$ variables vanishing for a large number of values of each variable independently.

Let us now suppose that we have a universally valid equation

$$\Phi(n, m, p, \delta, k, \tau, \iota, n', m', c', \delta'_1, \delta'_2, \tau'_1, \tau'_2, k', \iota') = 0.$$

Making use of the equations of PLÜCKER and KLEIN, we eliminate m, p, τ, ι , and τ'_2

$$(I) \quad \mathfrak{F}(n, \delta, k, n', \delta'_2, k', \iota', \delta'_1, c', m', \tau'_1) = 0.$$

We shall assume that the highest power to which any one variable appears is N . We proceed to construct a curve which can be altered in such a way that each of these arguments can be given more than N values without altering the values of any of the other arguments.

³) FR. MEYER, *Ueber Discriminanten und Resultanten der Gleichungen für Singularitäten von algebraischen Raumcurven, mit Anwendung auf Realitätsverhältnisse* [Monatshefte für Mathematik und Physik, t. IV (1893), pp. 229-276, 331-363], p. 359.

⁴) C. JUEL, *Ueber einen neuen Beweis der KLEINSchen Relation zwischen den Singularitäten einer ebenen algebraischen Kurve* [Mathematische Annalen, Bd. LXI (1905), pp. 77-87], p. 86.

The equation of the curve in question shall be

$$(2) \quad f(x, y)\varphi(x, y) + \varepsilon(x - a)^3\psi(x, y) = 0.$$

We proceed to describe it very carefully.

The curious expression ε^3 indicates that the degree of the second part is less by 3 at least than n the degree of the first. ε is a real infinitesimal, and φ , though possessed of a real equation, has no real non-singular points. Hence the curve lies infinitely close to f and follows the general shape of the latter. Moreover, by varying ε we have a linear system of curves, and the general curve of a linear system has no singular point which is not a fixed singular point for all curves of the system. We shall assume that the compound curve $f\varphi$ has no singular point on ψ , the singular points of the general curve are thus the singular points of $f\varphi$ on the line

$$(3) \quad x - a = 0$$

or on the line at infinity. Moreover, since (3) and the equation of the line at infinity appear to the third degree in (2) all curves of the system have the same tangents at each point of these two lines.

φ and ψ are taken as real in the sense that their equations are real, but they are not supposed to have any real non-singular points. It remains to describe f . This is supposed to consist in:

a) Finite quartic loops of three types to be described presently

b) Pairs of conjugate imaginary lines meeting in real points on (3) or on the line at infinity. We shall imagine that n is so very large that we have these loops and lines in great profusion.

Types of quartic loop in f .

1° Elliptic loops or ovals. We get the equation of such a loop by multiplying together the equations of a real and a self-conjugate imaginary ellipse, the imaginary asymptotes of the two not being parallel. A goodly number of these ovals shall intersect in pairs on (3) and we shall have at least one nest of $N + 2$ of these ovals surrounding one another, all very small, and none meeting (3). There may be other elliptic loops scattered elsewhere in the plane.

2° Lima bean loops. We obtain one of these by an infinitesimal change in the coefficients in the equation of a cardioid. Note that each of these has two real inflections, one real double tangent, but no singular point.

3° Moon shaped loops. Each of these has two real cusps, the horns; two real inflections, near the cusps on the limb, but only one double tangent, and no other real point inflection. We construct such a curve as follows. Starting with the equation

$$(xy + x + y)^2 - zy + \delta = 0$$

where δ is a real infinitesimal, we see that we have a quartic with a cusp at the end of each axis, but no other singular point besides. By turning the axes through an angle of 45° we easily find one conjugate tangent, and PLÜCKER's equations show

that this is the only double tangent, and that the class is 6. Hence we find by KLEIN's equation that there are just two real inflections. A linear transformation of this curve will give us just what we require.

Let us next see what each of the arguments in (1) will depend upon in the case of a curve of type (2).

n . This depends upon the total degree of $f\varphi$.

δ and k . These depend upon the total number of double points which f and φ have on (3) and on the line at infinity. They will not be altered by a change in f which replaces a pair of real double points or cusps by a pair of conjugate imaginary ones.

δ'_2 . This depends upon the number of pairs of conjugate imaginary lines which go to make up φ and which meet on (3) or on the line at infinity. It will not be affected by a change from one kind of pair to the other.

n' . This is the maximum number of real intersections with any one real line. The line (3) is supposed to meet as many loops in real points as does any other real line; in addition it is supposed to contain a number of conjugate points, so that the number n' may be assumed to depend uniquely upon the number of points of our curve on (3).

k' . The only real cusps are pairs of horns on (3).

ι' . The only real inflections are on the moon-shaped or the bean-shaped loops. An alteration in the curve which replaces one of these loops by another will not alter ι' .

δ'_1 . This depends upon the number of pairs of loops intersecting on (3). It will not be altered by any alteration in the curve which leaves these intersections undisturbed.

c' . This depends upon the number of loops, as a conjugate point is not counted as a loop.

m' . This is the most troublesome of all the arguments. Its value will not be apparent at all from the form of the curve (2). The number of real tangents from any point will be made up of the lines through that point which touch the curve in real points, and those which touch it in pairs of conjugate imaginary points, i. e. conjugate tangents. The total number of these latter is determined by KLEIN's equation, not so their positions. We may imagine that m so far overtops n that τ'_2 is well above $N + 1$ and then require $f\varphi$ to touch the line at infinity in a large number of pairs of conjugate imaginary points, so that this line is a conjugate tangent of high order, and m' will depend upon this multiplicity and upon the number of real tangents in any one direction.

τ'_1 . This will depend upon, first the number of lima-bean loops, and secondly upon the number of pairs of loops whereof the one is not everywhere concave to the other, the intersections of such loops, and the relations of their inflectional tangents.

At last we are able to put through our formal proof.

A) Independence of τ'_1 . We assume that n is so very large that we have one nest of small ovals, separated from all other loops by such a considerable distance, that small alterations in their position will not affect the number of real tangents common to one of them and to a distant loop. Remove the innermost loop and place it near the nest outside. No loop shall meet (3) in real points after its removal. Going through our list of characteristics, we see that the only one to be altered is τ'_1 , which has been increased by four times the number of loops left in the nest. We then take out a second, a third, etc. each time adding to τ'_1 and leaving the other arguments unaltered. Thus τ'_1 can take $N+1$ different values without altering the values of the other arguments. It appears then, that either (1) is independent of the argument τ'_1 or else the coefficient of each power thereof vanishes for a curve of type (2). Under either hypothesis, if (1) subsist for the general curve, there must be in the case of a curve of type (2) one or more similar equations lacking the argument τ'_1 .

B) Independence of m' . We have pointed out that if we assume m sufficiently greater than n , we may give to the line at infinity a high multiplicity as a conjugate tangent, and alter this multiplicity by $N+1$ different values, without altering the aspect of the curve in any visible way. It appears then, that m' can be given $N+1$ different values without altering any of the other arguments in (1). We may reason on m' exactly as we did on τ'_1 and our conclusion is that if (1) subsist for every curve, then for a curve of type (2) there must be one or more such equations independent of the arguments τ'_1 and m' . Our proof consists in showing, by means of the lemma, that these equations can only be $0=0$ so that the same must be true of (1).

C) Independence of c' . This argument is altered by replacing elliptic ovals which do not intersect (3) in real points, by self conjugate imaginary loops. The equation of such a loop is obtained by equating a definite quartic form to zero. It is true that this process alters τ'_1 and m' , but we have just seen that they may be ignored, the other characteristics will be unaltered, and c' may be given $N+1$ different values, hence it does not enter in the case of our present curves.

D) Independance of δ'_1 . This characteristic depends solely upon the number of pairs of loops meeting on (3). If we replace such a pair by one where each member meets (3) in two distinct real points, and make good the reduction in δ by giving to f or φ and extra pair of conjugate imaginary double points at infinity, then no characteristic has been altered but δ'_1 which has been reduced by 2. Thus continuing the process, δ'_1 can take $N+1$ values, and so does not enter. It is well to repeat that we assume n so very large in comparison with N that we may put $N+1$ pairs of extra double points on the line at infinity without overloading the latter with intersections.

E) Independence of ι' . This is shown by replacing $N+1$ lima beans successively by elliptic ovals. Care must be taken that the bean and oval shall meet (3) in the same number of real points, so that the bean abolished must not be one that has

four real intersections with (3). Alterations in τ'_1 or m' involved in this process have been shown to be immaterial, and ν' is the only other characteristic affected.

F) Independence of k' . The contribution of a moon loop to our curve is two cusps and two inflections. If we replace a moon by a lima bean having the same number of real intersections with (3) and restore k to its pristine value by giving to f or φ an extra pair of conjugate imaginary cusps at infinity, then the only characteristic affected is k' which has been reduced by 2. Remembering our remarks under D) about not overloading the line of infinity, we see that k' can be given $N + 1$ values, so it too does not enter.

G) Independence of δ'_2 . This number depends upon the pairs of conjugate imaginary lines meeting on (3) or on the line at infinity. The former we shall leave unaltered as they affect n' , with regard to the latter, if we replace two pairs of conjugate imaginary lines meeting at infinity, by two imaginary ellipses with parallel asymptotes, but no finite intersection on (3), we have reduced δ'_2 by 2, but left δ as it was. Thus δ'_2 can take $N + 1$ independent values, and so does not enter into the equation.

H) Independence of n' . This characteristic depends upon the number of real intersections with (3) and can be altered by transferring conjugate points from the overworked line at infinity to (3). We easily see that n' can thus be given $N + 1$ different values, without altering in the least any of the other characteristics in (1). Hence n' does not enter.

I) Independence of n, δ, k . The aspect of our curve is not in the least altered by giving to φ extra definite quartic factors, or extra pairs of conjugate imaginary infinite double points or cusps, and these three operations are independent of one another. Hence each of the arguments n, δ, k can take $N + 1$ independent values, no one of them can enter.

Conclusion. We have shown that if any such equation as (1) hold in the case of the general curve, then for a curve of type (2) there must be an equation of this sort where the arguments τ' and m' did not enter, and we have shown, by means of our lemma, that no such equation other than $0 = 0$ does exist for all curves of type (2). Hence (1) must also be illusory, and the only equations which do subsist are those which are derivable from the known equations of PLÜCKER and KLEIN.

Cambridge Mass., february 1917.

J. L. COOLIDGE.

REMARQUES SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES PAR LES MÉTHODES DE M. BOREL.

Par G. Valiron (Lyon).

Adunanza del 25 marzo 1917.

Dans un mémoire récemment publié dans les *Rendiconti* ¹⁾ M M. HARDY et LITTLEWOOD ont démontré des propositions intéressantes concernant la sommation des séries par la méthode de sommation exponentielle de M. BOREL, propositions qui généralisent celles énoncées par les mêmes auteurs dans un mémoire des *Proceedings of the London Mathematical Society* ²⁾. M M. HARDY et LITTLEWOOD établissent notamment le théorème suivant :

lorsque dans une série divergente le produit du terme général par la racine carrée de son rang reste fini, la série n'est pas sommable par les moyennes exponentielles.

Cette proposition se rattache à une propriété connue des fonctions entières d'une variable réelle, à coefficients positifs très réguliers, qui fut tout d'abord utilisée par M. BOREL dans le cas particulier de la fonction exponentielle : pour de telles fonctions le rapport de la somme d'un groupe de termes entourant le terme maximum à la valeur de la fonction tend vers *un* lorsque la variable croît indéfiniment ³⁾. La propriété précédente doit donc se généraliser, en modifiant convenablement l'hypothèse, au cas où l'on prend pour fonction sommatrice une fonction entière à coefficients très réguliers et, en particulier, lorsqu'on utilise les fonctions de M M. MITTAG-LEFFLER et LINDELOF. C'est ce que je me propose de montrer dans ce qui suit ; je remplacerai d'ailleurs l'hypothèse faite sur le terme général par une autre, plus large, sur la somme de p termes consécutifs, p croissant indéfiniment en même temps que le rang de ces termes ⁴⁾.

¹⁾ G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *Theorems concerning the Summability of Series by BOREL's exponential Method* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLI (1916), pp. 36-53].

²⁾ G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *The Relations between BOREL's and CESÀRO's Methods of Summation* [Proceedings of the London Mathematical Society, series II, vol. XI (1912-1913), pp. 1-16].

Voir également le mémoire des mêmes auteurs : *Contributions to the Arithmetic Theory of Series* (ibidem, pp. 411-478).

³⁾ Voir É. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes* (Paris, Gauthier-Villars, 1901), p. 141 et suivantes.

⁴⁾ Une généralisation du même genre a été faite par M. E. LANDAU dans le cas du théorème

Je désignerai par c_n le coefficient de x^n dans le développement de TAYLOR de la fonction sommatrice $F(x)$, et montrerai d'abord (§ I) que des hypothèses assez simples sur la croissance de la dérivée seconde du logarithme de c_n , prise par rapport à n , entraînent déjà pour la sommabilité des conséquences très voisines de la proposition énoncée ci-dessus. Je montrerai ensuite (§ II) que, lorsque la somme s_n des n premiers termes de la série croît assez lentement, on peut mettre en évidence le terme maximum de la fonction entière, ce qui conduit à considérer une expression de la forme

$$\sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \sum_{-x}^{+\infty} e^{-\frac{q^2}{2} H(x)} s_{q+x}$$

dans laquelle $-H(n)$ est la dérivée seconde du logarithme de c_n par rapport à n . Cette nouvelle forme permet de resserrer les limites d'application du théorème de M. M. HARDY et LITTLEWOOD. En remplaçant enfin la somme précédente par une intégrale on arrivera à la démonstration du théorème définitif (§ III).

Le procédé de sommation introduit ci-dessus est la généralisation du procédé (E, a) de M. M. HARDY et LITTLEWOOD, je l'appellerai procédé (H) ; il sera légitime de l'employer lorsque le produit $H(x)x^2$ croît indéfiniment avec x [$H(x)$ tendant vers zéro], mais dans ces conditions il ne sera pas toujours possible d'établir l'équivalence avec la sommation par une fonction entière, ce sera le cas pour $H(x) = x^\alpha$, α étant compris entre -1 et -2 . On est alors conduit à la sommation (H) par la recherche de la limite, lorsque x tend vers ∞ , d'une expression de la forme

$$\frac{\sum c_n^1 x^n s_n}{\sum c_n^1 x^n}$$

dans laquelle le dénominateur a pour rayon de convergence l'unité et des coefficients positifs satisfaisant à certaines conditions de régularité. Je montrerai (§ IV) que ce nouveau procédé de sommation est applicable à l'étude d'une série entière aux points réguliers du cercle de convergence.

Tous les procédés de sommation que je considérerai sont d'ailleurs basés sur la méthode générale des moyennes introduite par M. BOREL ⁵⁾ ce qui justifie le titre donné à cette note.

§ I.

1. Je supposerai d'abord que la fonction sommatrice $F(x)$ est de la forme suivante

$$F(x) = \sum_0^\infty c_n x^n = \sum_0^\infty (1 + \alpha_n) e^{-G(n)} x^n,$$

de TAUBER: *Über einen Satz des Herrn LITTLEWOOD* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXV (1^o semestre 1913). pp. 265-276].

⁵⁾ Voir les *Leçons sur les séries divergentes*, l. c. 3), p. 92.

le produit $n\alpha_n$ étant borné en module et $G(x)$ étant une fonction jouissant des propriétés suivantes :

$$(A) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 G''(x)}{\log x} = \infty,$$

$$(B) \quad |G''(x_1) - G''(x)| < \varepsilon(x) G''(x)^6, \quad |x_1 - x| < [G''(x)(\log x)^{-1}]^{-\frac{1}{2} + \beta} \quad \beta > 0.$$

Le rôle de ces deux conditions apparaîtra dans la démonstration de la proposition fondamentale suivante.

THEOREME I. — Si l'on désigne par $\xi(x)$ ou plus simplement par ξ le rang du terme maximum de la fonction entière $F(x)$ et par s_n une fonction de l'entier n dont le module reste inférieur à n^p (pour n supérieur à un nombre fixe A_0), on a l'égalité

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{F(x)} \left[\sum_0^\infty c_n s_n x^n - \sum_{N_1}^{N_2} c_n s_n x^n \right] = 0,$$

dans laquelle N_1 et N_2 désignent deux entiers définis par l'égalité

$$(2) \quad N_2 - \xi = \xi - N_1 = A(p) \sqrt{\log \xi [G''(\xi)]^{-1}}.$$

D'après l'hypothèse faite sur s_n tout revient à démontrer la proposition pour $s_n = n^p$ et par suite à établir que les expressions

$$(3) \quad \frac{1}{F(x)} \sum_{N_2}^\infty c_n n^p x^n, \quad \frac{1}{F(x)} \sum_0^{N_1} n^p c_n x^n$$

ont pour limite zéro lorsque x croît indéfiniment. Je ferai la démonstration pour la première, la méthode étant la même pour la seconde. Je supposerai actuellement que dans la première expression (3) N_2 est un nombre quelconque supérieur à ξ , et je chercherai à le déterminer pour que l'expression tende vers zéro. Le nombre ξ est la partie entière, ou la partie entière augmentée d'une unité, de la racine de l'équation

$$(4) \quad G'(y) = \log x,$$

racine qui est unique dès que x est supérieur à un nombre x_0 facile à déterminer, puisque, d'après la condition (A), $G'(x)$ est croissante à partir d'une certaine valeur de x .

Posons

$$R(n, x) = \sum_n^\infty c_n n^p x^n$$

et comparons les termes de même rang dans $R(N_2, x)$ et $R(n_0, x)$, n_0 étant compris entre ξ et N_2 , on a

$$\rho_q = \frac{c_{N_2+q} (N_2 + q)^p x^{N_2+q}}{c_{n_0+q} (n_0 + q)^p x^{n_0+q}} = \left(1 + \frac{\lambda(x)}{n_0}\right) \left(1 + \frac{N_2 - n_0}{n_0 + q}\right)^p x^{N_2 - n_0} e^{-G(N_2+q) + G(n_0+q)}.$$

⁶⁾ Dans tout ce qui suit je désignerai par $\varepsilon(x)$ toute fonction tendant vers zéro, et par $\lambda(x)$ toute fonction restant bornée lorsque x croît indéfiniment.

En appliquant à la fonction $G(x)$ la formule des accroissements finis, en s'appuyant sur la croissance de $G'(x)$, et en remplaçant $\log x$ par $G'(\xi + 1)$ qui lui est supérieur d'après la définition de ξ [égalité (4)], on voit que l'on a

$$\log \rho_q < (p+1) \log \left(1 + \frac{N_2 - n_0}{\xi} \right) + (N_2 - n_0) [G'(\xi + 1) - G'(n_0)], \quad x > x_0,$$

ou finalement

$$\log \rho_q < (p+1) \log \left(1 + \frac{N_2 - n_0}{\xi} \right) - (N_2 - n_0)(n_0 - \xi - 1) G''(\xi_1) \quad \left| \begin{array}{l} \xi_1 = \xi + \theta(n_0 - \xi - 1), \\ |\theta| < 1. \end{array} \right.$$

$G''(x)$ varie lentement d'après la condition (B), on est donc conduit à prendre pour n_0 une valeur différant de moins d'une unité de la moyenne de ξ et N_2 ; $R(N_2, x)$ sera alors inférieur au produit de $R(n_0, x)$ par le nombre $\gamma(x)$

$$\gamma(x) = \left(1 + \frac{N_2 - \xi}{2\xi} \right)^{p+1} e^{-\frac{(N_2 - \xi - 1)^2}{4} G''(\xi_1)}.$$

On obtient ainsi l'inégalité

$$R(N_2, x) < \frac{\gamma(x)}{1 - \gamma(x)} \sum_{n=\xi}^{N_2} n^p c_n x^n < \frac{\gamma(x) N_2^p}{1 - \gamma(x)} F(x)$$

et l'on peut évidemment choisir N_2 pour que le coefficient de $F(x)$ tende vers zéro, il suffit que le produit $\gamma(x) N_2^p$ tende lui-même vers zéro ce qui aura lieu si l'on prend

$$(N_2 - \xi - 1)^2 = (4p + 1) \frac{\log \xi}{G''(\xi)}, \quad x > A_1,$$

puisque la condition (B) permet alors de remplacer ξ_1 par ξ dans l'expression de $\gamma(x)$.

Le théorème I est donc démontré et l'on voit que $A(p)$ est inférieur à $4p + 1$ lorsque $\log \xi G''(\xi)$ croît indéfiniment.

Dans le cas où les nombres s_n sont bornés le raisonnement fait ci-dessus montre que l'égalité (1) est encore valable en prenant

$$N_2 - \xi = \xi - N_1 = \frac{1}{\varepsilon(\xi) \sqrt{G''(\xi)}},$$

et il est facile de se convaincre que cet intervalle ne peut être restreint.

2. Les conditions (A), (B) s'introduisent naturellement dans la démonstration du théorème précédent, ce sont des conditions de régularité n'apportant aucune restriction à la croissance de la fonction entière $F(x)$. En effet, la fonction $F(x)$ étant entière, le quotient de $G(x)$ par x a pour limite l'infini lorsque x croît indéfiniment, et par suite $G'(x)$ n'est pas borné supérieurement, supposer que ce nombre croît n'est donc qu'imposer une première condition de régularité; d'autre part, quel que soit α , le produit $x^{1+\alpha} G''$ n'est pas borné, ce qui achève de montrer que la condition (A) ne limite pas la croissance. Pour la condition (B) le même fait résulte de la remarque faite ci-dessus lorsque $G''(x)$ tend vers zéro; il est évident lorsque $G''(x)$ a une limite

ou bien croît indéfiniment en restant inférieur à $\log x$, enfin si le quotient de $G''(x)$ par $\log x$ reste supérieur à un nombre fixe la différence $N_2 - N_1$ restera finie sans que $G''(x)$ soit astreint à aucune autre condition. Les fonctions correspondant à ce dernier cas sont d'ordre nul, à croissance très lente, elles ne nous intéresseront pas dans la suite.

3. Considérons une série et désignons par s_n la somme de ses n premiers termes, nous dirons que la série est sommable B , de somme s , par la fonction entière $F(x)$ satisfaisant aux conditions (A), (B), si l'on a

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{F(x)} \sum_0^{\infty} c_n s_n x^n = s.$$

Une série convergente ayant pour somme s est sommable B avec la même somme. Certaines séries divergentes peuvent être sommables, par exemple la progression géométrique dont le terme général est z^n est sommable par les fonctions $F(x)$ vérifiant la condition

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(zx)}{F(x)} = 0.$$

La région du plan des z pour laquelle cette égalité est vérifiée est d'un seul tenant, et permet de définir pour toute fonction de z une étoile de sommabilité ne dépendant que de la position des points singuliers. Pour que la sommation B permette le prolongement analytique dans une région ne dépendant que de la position des points singuliers, il est donc nécessaire que la condition (6) soit vérifiée pour des valeurs de z de module supérieur à un , ce qui exige que la fonction $F(x)$ soit d'ordre positif. Les fonctions d'ordre nul pourront cependant permettre la sommation de certaines séries divergentes, c'est ainsi que la progression géométrique sera sommable pour les valeurs de z de module égal à un lorsque la condition (6) sera vérifiée pour ces valeurs; il sera toutefois nécessaire que le quotient de $\log F(x)$ par le carré de $\log x$ ait une limite supérieure infinie lorsque x croît indéfiniment ⁷⁾. Nous supposons dorénavant que cette condition est réalisée.

4. La propriété de la sommation B mise en évidence par M M. LITTLEWOOD et HARDY apparaît immédiatement, sous une forme encore imprécise, comme conséquence du théorème I. On obtient en effet le théorème suivant, valable pour toute fonction $F(x)$ satisfaisant aux conditions (A), (B):

THEOREME II. Désignons par $\sigma(n)$ le maximum du module de la différence $s_{n+p} - s_n$ lorsque la valeur absolue de p varie de 0 à

$$(\log n)^{\frac{1}{2}} [G''(n)]^{-\frac{1}{2}}$$

et supposons que $\sigma(n)$ ait pour limite zéro lorsque n croît indéfiniment. Dans ces conditions la série ne peut être sommable B par la fonction $F(x)$ sans être convergente.

⁷⁾ Voir G. VALIRON, *Thèse*, en particulier page 34.

Car s_n étant inférieur à n le théorème I est applicable, et comme l'on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{F(x)} \sum_{N_1}^{N_2} c_n s_n x^n - \frac{s_x}{F(x)} \sum_{N_1}^{N_2} c_n x^n \right] = 0$$

on voit que si la série est sommable B , de somme s , s_x a pour limite s ce qui démontre la proposition.

En prenant pour fonction $F(x)$ les fonctions $E(\alpha, x)$ de M. MITTAG-LEFFLER, qui pour $\alpha = 1$ donnent la fonction exponentielle, on a

$$E(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad G(x) = \left(x\alpha + \frac{1}{2} \right) \log(x) - \alpha x,$$

la limite de variation de p est donc la même, à un facteur constant près, pour toutes ces fonctions et est égale à $k n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{-\frac{1}{2}}$.

Le résultat est le même pour les fonctions $E_\sigma(x)$ de M. LINDELOF, pour lesquelles on trouve

$$E_\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{n^\sigma} \right)^n, \quad G(x) = x \tau \log x.$$

Pour les fonctions d'ordre infini $G''(x)$ décroîtra moins vite, et par suite le théorème II sera moins restrictif; ainsi pour la fonction $L_\beta(x)$ de M. LINDELOF on aura

$$L_\beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x}{\log(n + \beta)} \right]^n, \quad G(x) = x \log_2(x + \beta),$$

l'intervalle de variation de p sera ici égal à $k\sqrt{n}$.

§ 2.

5. Le théorème I qui restreint le nombre des termes déterminant la valeur de la fonction $F(x)$ conduit naturellement à mettre en évidence le terme maximum. Pour obtenir un résultat simple nous devons faire des hypothèses plus restrictives sur la croissance de la fonction $G''(x)$. Nous supposerons que les conditions (A), (B) sont remplacées par les suivantes:

$$(A') \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 G''(x)}{(\log x)^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G''(x) \cdot \log x = 0;$$

$$(B') \quad \left| \frac{G''(x_1)}{G''(x)} - 1 \right| < B \left| \frac{x_1 - x}{x} \right|, \quad |x_1 - x| < \left[\frac{G''(x)}{\log x} \right]^{-\frac{1}{2} + \beta}, \quad B > 0, \quad \beta > 0.$$

Nous pourrions alors démontrer la proposition suivante:

THEOREME III. — La fonction $G''(x)$ vérifiant les conditions (A'), (B'), et la suite des nombres s_n satisfaisant à la condition

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|s_n| [1 + n G''(n)]}{n \sqrt{G''(n)}} = 0,$$

on a l'égalité

$$(7) \quad \frac{1}{F(x)} \sum_0^{\infty} c_n s_n x^n \sim \sqrt{\frac{G''(\xi)}{2\pi}} \sum_{N_1}^{N_2} e^{-\frac{1}{2}(n-\xi)^2 G''(\xi)} s_n \quad ^8).$$

Tout d'abord le théorème I étant applicable en vertu de la condition imposée à s_n et de la condition (A'), on peut remplacer dans le premier membre de l'égalité (7) les limites 0, ∞ par N_1 et N_2 . Désignons alors par $T(x)$ la valeur du terme maximum de $F(x)$, on aura

$$\begin{aligned} \log c_n x^n &= \log T(x) + (n - \xi) \log x + G(\xi) - G(n) + \frac{\lambda(\xi)}{\xi} \\ &= \log T(x) + (n - \xi) [\log x - G'(\xi)] - \\ &\quad - \frac{1}{2} (n - \xi)^2 G''[\xi + \theta(n - \xi)] + \frac{\lambda(x)}{\xi}, \quad |\theta| < 1. \end{aligned}$$

* L'équation (4) montre que $\log x$ est égal à $G'(\xi + \theta')$, θ' étant inférieur à un en valeur absolue, par suite, en utilisant la condition (B'), on aura pour les valeurs de n comprises entre N_1 et N_2

$$\begin{aligned} \log c_n x^n &= \log T(x) - \frac{1}{2} (n - \xi)^2 G''(\xi) \\ &\quad + \lambda(x)(n - \xi) G''(\xi) + \lambda(x) \frac{1}{\xi} (n - \xi)^3 G''(\xi) + \lambda(x) \frac{1}{\xi}. \end{aligned}$$

On voit aisément, en utilisant de nouveau les conditions (A'), (B') et en tenant compte des valeurs de N_1 et N_2 , que les trois facteurs de $\lambda(x)$ tendent vers zéro lorsque x croît indéfiniment, on pourra donc écrire ⁹⁾

$$(8) \quad \begin{cases} c_n x^n = T(x) e^{-\frac{1}{2}(n-\xi)^2 G''(\xi)} (1 + \alpha(n, \xi)) \\ \alpha(n, \xi) = \lambda(x) \left[\frac{1}{\xi} + (n - \xi) G''(\xi) + \frac{1}{\xi} (n - \xi)^3 G''(\xi) \right], \end{cases}$$

ce qui conduira à l'égalité

$$(9) \quad \frac{1}{F(x)} \sum_0^{\infty} c_n s_n x^n \sim \frac{T(x)}{F(x)} \left[\sum_{N_1}^{N_2} e^{-\frac{1}{2}(n-\xi)^2 G''(\xi)} s_n + \lambda(x) S(x) \{A_1(x) + A_2(x) + A_3(x)\} \right],$$

dans laquelle $S(x)$ désigne le maximum de s_n dans l'intervalle N_1, N_2 et où l'on a

$$\left. \begin{aligned} A_1(x) &= \frac{1}{\xi} \sum_{N_1}^{N_2} u_n(\xi) \\ A_2(x) &= G''(\xi) \sum_{N_1}^{N_2} u_n(\xi) (n - \xi) \\ A_3(x) &= \frac{1}{\xi} G''(\xi) \sum_{N_1}^{N_2} u_n(\xi) (n - \xi)^3 \end{aligned} \right\} u_n(\xi) = e^{-\frac{(n-\xi)^2}{2} G''(\xi)}.$$

⁸⁾ Le signe \sim indiquera dans tout ce qui suit que le rapport des deux membres a pour limite un ou qu'ils tendent simultanément vers zéro.

⁹⁾ C'est dans les mêmes conditions que l'on pourra écrire l'égalité (2. 125) du mémoire de M. M. LITTLEWOOD et HARDY, la démonstration du lemme 2. 12 devra être modifiée en conséquence.

On obtiendra des limites supérieures des sommes précédentes en remplaçant les limites N_1 et N_2 par 0 et ∞ ; or le nombre q étant entier et a positif on voit par un calcul bien simple que l'on a, quel que soit N ,

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{n=N} e^{-an^2} n^q < \lambda(N) + \int_0^\infty e^{-a^2x} x^q dx \\ = \lambda(N) + B_q a^{-\frac{q+1}{2}} \begin{cases} B_q = q(q-2) \dots 2 \times 2^{-\frac{q+1}{2}} \sqrt{\pi}, & q = 2q', \\ B_q = q(q-2) \dots 3.1 \times 2^{-\frac{q+1}{2}}, & q = 2q' + 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

En utilisant cette inégalité et l'hypothèse faite sur s_n qui, eu égard à la condition (B'), entraîne pour $S(x)$ l'égalité (a) où n est remplacé par x , on aura

$$(11) \quad S(x) [A_1(x) + A_2(x) + A_3(x)] = \varepsilon(x) [G''(x)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Il reste à calculer la valeur de $T(x)$, il suffit pour cela d'appliquer l'égalité (9) au cas où s_n est égal à un, on obtient ainsi l'égalité asymptotique

$$F(x) \sim T(x) \sum_{N_1}^{N_2} e^{-\frac{1}{2}(n-\xi)^2 G''(\xi)}$$

dans laquelle on peut remplacer les limites N_1 et N_2 par $\pm \infty$, car on a pour cette somme un théorème analogue au théorème I. En remplaçant la somme ainsi obtenue par une intégrale dont la valeur est donnée par l'égalité (10) on trouve que le quotient de $F(x)$ par $T(x)$ est asymptotiquement égal à $\sqrt{\frac{2\pi}{G''(\xi)}}$. En portant la valeur ainsi trouvée pour $T(x)$ dans l'égalité (9) et en utilisant l'égalité (11) on obtiendra l'égalité (7). Le théorème III est donc démontré.

6. Le théorème III est un théorème d'équivalence; il établit en effet que s_n satisfaisant à la condition (a) le procédé de sommation B est équivalent à celui qui consisterait à chercher la limite de l'expression

$$(12) \quad \sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \sum_{N_1'}^{N_2'} e^{-\frac{1}{2}q^2 H(x)} s_{x+q}, \quad N_2' = -N_1' = A \sqrt{\frac{\log x}{H(x)}},$$

lorsque x croît indéfiniment, la fonction $H(x)$ satisfaisant aux conditions imposées à $G''(x)$. Il est clair qu'il existe un théorème jouant, vis à vis de l'expression (12), le rôle du théorème I; on démontrera en effet, de la même façon la proposition suivante:

THEOREME I'. — Si la fonction $H(x)$ satisfait à la condition (A) et si s_n reste inférieure à partir d'un certain rang à n^p , on a

$$\lim_{x=\infty} \sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \left[\sum_{N_1'}^{N_2'} e^{-\frac{1}{2}q^2 H(x)} s_{x+q} - \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2 H(x)} s_{x+q} \right] = 0.$$

Cette proposition introduit un nouveau procédé de sommation qui consiste à chercher la limite de l'expression

$$\sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \sum_{-x}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2 H(x)} s_{x+q}$$

lorsque x croît indéfiniment par valeurs entières, $H(x)$ vérifiant l'égalité (A). Ce procédé est la généralisation de celui indiqué par MM. HARDY et LITTLEWOOD sous le nom de procédé (E, a) , je le désignerai sous le nom de *sommation H*. Des théorèmes III et I' on déduit le corollaire suivant.

THEOREME III'. — Si la fonction $H(x) = G''(x)$ vérifie les conditions (A'), (B'), et si s_n vérifie la condition (a), les procédés de sommation B et H sont équivalents.

Du mode de démonstration du théorème III on déduit facilement que, dans l'énoncé précédent, on peut remplacer l'égalité entre $H(x)$ et $G''(x)$ par l'égalité moins restrictive $G''(x) + \lambda(x) \frac{1}{x} \sqrt{G''(x)} = H(x)$.

Comme conséquence on voit par exemple, en se reportant au n° 3 que la sommation B par l'une ou l'autre des fonctions $E(x, \alpha)$ et $E_\alpha(x)$ est équivalente, si $s_n n^{-\frac{1}{2}}$ tend vers zéro, à la sommation H avec $H(x) = \frac{\alpha}{x}$.

7. Dans les théorèmes précédents nous avons supposé une limitation de s_n , cette limitation peut se déduire d'une hypothèse sur les termes de la série et de l'hypothèse de la sommabilité. On obtient le théorème suivant.

THEOREME IV. — Si la série dont la somme des n premiers termes est s est sommable B (ou H), et si l'on suppose que $\rho(n)$ désignant le maximum du module de $s_{n+p} - s_n$ lorsque p reste inférieur à $1 + \frac{1}{n G''(n)}$, on a

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n) = 0$$

s_n vérifie la condition (a).

Les conditions imposées à la fonction sommatrice sont ici les conditions (A') et (B').

Je ferai la démonstration dans le cas de la sommation B , qui est le moins simple. Il est tout d'abord évident que, s_n restant inférieur à kn , le théorème I s'applique; on peut d'autre part remplacer s_n par $s_\xi + (s_n - s_\xi)$ et séparer les termes correspondant à s_ξ , enfin majorer la différence $|s_n - s_\xi|$ par $\varepsilon(x) \frac{\xi G''(\xi)(n - \xi)}{1 + \xi G''(\xi)}$, ce qui donne l'égalité

$$s_\xi = s[1 + \varepsilon(x)] + \varepsilon(x) \frac{\xi G''(\xi)}{1 + \xi G''(\xi)} \sum_{N_1}^{N_2} c_n (n - \xi) x^n.$$

En remplaçant $c_n x^n$ par la valeur donnée par l'égalité (8), on voit que la somme figurant dans le second membre de l'égalité précédente est inférieure au produit de

$T(x)$ par $A(x)$: $G''(\xi)$, et par suite inférieure à $\frac{1}{\sqrt{G''(\xi)}}$ et l'on retombe sur l'égalité

(a) puisque ξ est susceptible de prendre toutes les valeurs.

Lorsque le produit $x G''(x)$ ne tend pas vers zéro, c'est-à-dire lorsque la sommation B est faite par une fonction entière d'ordre fini ou nul, l'énoncé du théorème IV se simplifie, s_n vérifie la condition (b) lorsque le terme général tend vers zéro; la

condition (a) se simplifie elle-même et exprime que s_n est inférieur à $\varepsilon(n)[G''(n)]^{-\frac{1}{2}}$.

8. La substitution de la sommation H à la sommation B , possible d'après ce qui précède lorsque les nombres s_n vérifient la condition (a) ou la condition énoncée au n° précédent, permet de donner un énoncé plus précis du théorème II:

THEOREME II'. — Si le maximum $\sigma(n)$ de $|s_{n+p} - s_n|$, lorsque p prend toutes les valeurs inférieures à $\frac{1}{\sqrt{G''(n)}}$, tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, et si la série est sommable B (ou H), de somme s , la fonction $G''(x)$ [ou $H(x)$] satisfaisant aux conditions (A') et (B'), la série est convergente et a pour somme s .

On se trouve en effet dans les limites d'application du théorème III, et l'on a dans un cas comme dans l'autre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}}} \sum_{N'_1}^{N'_2} e^{-\frac{1}{2} q^2 H(x)} s_{x+q} = s, \quad N'_2 = -N'_1 = A \sqrt{\frac{\log x}{H(x)}},$$

$[H(x)$ étant remplacé par $G''(x)$ dans le cas de la sommation B]. On mettra s_x en évidence comme au n° 7, et on majorera la différence $|s_{x+q} - s_x|$ par $\varepsilon(x)[1 + q\sqrt{H(x)}]$ conformément à l'hypothèse, on obtiendra ainsi l'égalité

$$s_x + \varepsilon(x)\sqrt{H(x)} \sum_{N'_1}^{N'_2} e^{-\frac{1}{2} q^2 H(x)} [1 + q\sqrt{H(x)}] \sim s$$

et, en achevant le calcul comme ci-dessus, on voit que s_n est asymptotiquement égal à s , ce qui démontre la proposition.

La condition imposée à la série est évidemment vérifiée lorsque le terme général a_n reste, à partir d'un certain rang, inférieur à $\varepsilon(n)\sqrt{G''(n)}$ on a ainsi la proposition suivante, qui comprend celle démontrée par MM. HARDY et LITTLEWOOD dans leur premier mémoire:

Si la série de terme général a_n est sommable B par les fonctions $E(x, \alpha)$ ou $E_\alpha(x)$, et si le produit $a_n\sqrt{n}$ tend vers zéro, la série est convergente.

9. Dans le cas où la suite $\sigma(n)$ introduite dans l'énoncé du théorème II' est seulement bornée on peut encore faire les mêmes raisonnements que ci-dessus, et l'on est conduit à la proposition suivante qui jouera un rôle fondamental dans la suite:

LEMME. — Considérons une série sommable B (ou H) [les fonctions $G''(x)$ ou $H(x)$ vérifiant les conditions (A') et (B')], et supposons que la somme s_n des n premiers

termes satisfasse à la condition suivante: $\alpha(n)$ étant une fonction tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment le maximum $\sigma(n)$ de $|s_{n+p} - s_n|$ lorsque p reste inférieur à $\alpha(n)[G''(n)]^{-\frac{1}{2}}$ est lui-même inférieur à $A\alpha(n)$; alors la somme s_n est bornée en module.

Comme conséquence de ce lemme on voit que s_n étant borné en module, on peut appliquer la remarque faite à la fin du n° 1 (la même remarque pouvant être faite dans le cas de la sommation H), on aura donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{G''(x)}{2\pi}} \sum_{N'_1}^{N'_2} e^{-\frac{1}{2}q^2 G''(x)} s_{x+q} = s, \quad N'_2 = -N'_1 = \frac{1}{\varepsilon(x) \sqrt{G''(x)}}$$

et ceci quel que soit $\varepsilon(x)$. L'intervalle utile dans la recherche de la limite est ainsi, à un facteur près croissant aussi lentement que l'on veut, le même que celui dans lequel $|s_{n+p} - s_n|$ reste infiniment petit. On prévoit donc que, si la sommabilité B a encore lieu lorsque $G''(x)$ est remplacé par son produit par un nombre arbitrairement grand, la condition imposée aux s_n entraînera la convergence. On démontrera rigoureusement cette propriété en utilisant la valeur du reste trouvée au n° 1, mais la démonstration sera plus simple par la méthode de MM. LITTLEWOOD et HARDY.

§ 3.

10. Je montrerai maintenant rapidement que, moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur $G''(x)$ ou $H(x)$, on peut étendre la portée du théorème II' et obtenir l'énoncé définitif sous la forme suivante:

THEOREME II' — Si une série est sommable B (ou H), de somme s , et si la somme s_n des n premiers termes satisfait à la condition

$$(c) \quad |s_{n+p} - s_n| < \alpha(n), \quad p < \alpha(n)[G''(n)]^{-\frac{1}{2}} \quad \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0 \right]$$

la série est convergente, de somme s .

Je suivrai le mode de démonstration de MM. LITTLEWOOD et HARDY et remplacerai d'abord dans la sommation H la série par une intégrale en établissant la propriété suivante:

THEOREME III'. — Si $H(x)$ vérifie les conditions (A'), (B'), si le maximum $\rho(n)$ du module de $s_{n+p} - s_n$ pour $p \leq 1 + \frac{1}{nH(n)}$ tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, et si la série est sommable H , on a

$$\sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2 H(x)} s_{x+q} \sim \sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2 H(x)} f(t+x) dt,$$

$f(x)$ désignant une fonction nulle pour x négatif, linéaire dans tout intervalle $n, n+1$, et prenant pour $x = n$ la valeur s_n .

La démonstration résulte des deux faits suivants:

1° dans les deux membres on peut remplacer les limites par des nombres N'_1 et N'_2 tels que $N'_2 = -N'_1 = A(\log x)^{\frac{1}{2}} [H(x)]^{-\frac{1}{2}}$, la propriété résulte du théorème I' pour le premier membre puisque s_n est inférieur à n et découlerait d'un théorème analogue pour l'intégrale.

2° Pour les valeurs de t comprises entre les entiers q et $q+1$, on a

$$e^{-\frac{t^2}{2}H(x)} = e^{-\frac{1}{2}q^2H(x)} [1 + \lambda(x)qH(x)], \quad |q| < N'_2,$$

$$f(t+x) = s_{q+x} + \varepsilon(x); \quad f(t+x) < \frac{\varepsilon(x)x\sqrt{H(x)}}{1+xH(x)}, \quad |t| < N'_2$$

l'inégalité écrite en dernier lieu étant conséquence du théorème IV.

Je désignerai par méthode de sommation L le procédé qui consiste à attribuer pour somme à la série dont la somme des n premiers est s_n , la limite pour n infini (si cette limite existe) de l'intégrale

$$\sqrt{\frac{H(x)}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2H(x)} f(t+x) dt, \quad [f(y) = s_n + (s_{n+1} - s)(y - n), \quad n \leq y \leq n+1].$$

Les théorèmes III et III' montrent que, lorsque les s_n vérifient la condition (b), les méthodes de sommation (B), (H), (L) sont équivalentes, $G''(x) = H(x) + \lambda(x) \frac{x}{\sqrt{H(x)}}$ vérifiant les conditions (A') et (B').

II. Nous supposons dorénavant que $H(x)$ est décroissante et désignerons par $K(x)$ la fonction inverse de $\frac{2}{H(x)}$, $K(x)$ est croissante et son quotient par \sqrt{x} a pour limite ∞ ; la méthode de sommation L consiste dès lors à chercher la limite, pour x infini, de l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}t^2} f(t + K(x)) dt.$$

Nous pourrions, à partir de cette nouvelle forme, établir la proposition fondamentale suivante:

Supposons que la fonction $K(x)$ admette des dérivées première et seconde continues et vérifiant les conditions

$$(C) \quad \begin{cases} AK(x) < xK'(x) < BK(x) \\ K''(x) \cdot x^2 < CK(x), \end{cases} \quad (A > c)$$

et supposons qu'une série soit sommable, de somme s , à l'aide de cette fonction, la somme s_n des n premiers termes étant d'ailleurs bornée, cette série est alors sommable L à l'aide de la fonction $K(xa)$, quel que soit le nombre a supérieur à un.

On peut évidemment supposer que s est nul, et on doit vérifier que l'égalité

$$\lim_{x=\infty} \sqrt{a} \varphi(x, a) = \lim_{x=\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}t^2} f[t + K(x)] dt = 0$$

étant réalisée pour une valeur de a , elle l'est encore pour les valeurs supérieures, ou plus simplement que l'égalité a encore lieu lorsque a est remplacé par $a + \delta$ ($\delta < a$). Or on a

$$\varphi(x, a) = \sum_0^n \frac{(-1)^i}{\pi} \frac{\delta^i}{i!} I_i(x) + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} t^2 (a - \delta')} \times \\ \times \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\delta t^2}{x} \right)^{n+1} f[t + K(x)] dt \quad (\delta' < \delta)$$

$$I_i(x) = x^{-i - \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} t^2 a} t^{2i} f[t + K(x)] dt,$$

et, comme $f[t + K(x)]$ est borné, le second terme de $\varphi(x, a)$ est inférieur à

$$\frac{A}{(n+1)! \sqrt{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} t^2 a} \left(\frac{t^2 \delta}{x} \right)^{n+1} dt = \frac{2A}{(n+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\delta}{a} \right)^{n+\frac{1}{2}} du < \frac{K}{\sqrt{n}}.$$

Par suite tout revient à montrer que les fonctions $I_i(x)$ tendent vers zéro lorsque x croît indéfiniment, et, puisque $I_0(x)$ tend vers zéro, il suffit de vérifier que $I_n(x)$ tendant vers zéro il en est de même de $I_{n+1}(x)$. Or les $I_n(x)$ sont bornés, d'autre part on a en dérivant

$$I'_n(x) = -\frac{2n+1}{2x} I_n(x) + \frac{a}{x} I_{n+1}(x) + x^{-n-\frac{1}{2}} K'(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} t^2 a} t^{2n} f[t + K(x)] dt$$

en intégrant par partie la dernière intégrale on obtient finalement

$$(13) \quad I'_n(x) = -\frac{2n+1}{2x} I_n(x) + \frac{a}{x} I_{n+1}(x) + \frac{2K'(x)}{\sqrt{x}} [a I_{n+\frac{1}{2}}(x) - 2n I_{n-\frac{1}{2}}(x)].$$

En utilisant les propriétés (C) on déduit de cette égalité

$$|I''_n(x)| = \frac{\lambda(x)}{x^2} + \lambda(x) \frac{K(x)}{x^{5/2}} + \lambda(x) \frac{[K(x)]^2}{x^3}$$

comme $\frac{\sqrt{\lambda}}{K(x)}$ tend vers zéro c'est le troisième terme qui donne son ordre à la somme, on a donc simultanément

$$(14) \quad |I''_n(x)| = \lambda(x) x^{-3} [K(x)]^2, \quad |I_n(x)| = \varepsilon(x);$$

admettons pour l'instant que l'on puisse déduire de là l'inégalité

$$(15) \quad |I'_n(x)| = \varepsilon(x) x^{-\frac{3}{2}} K(x).$$

En portant cette valeur dans l'égalité (13), en faisant n égal à zéro et en résolvant par rapport à $I_{\frac{1}{2}}$ on trouvera que cette fonction tend vers zéro; d'une façon générale,

en faisant $n = \frac{1}{2}p$ et en résolvant par rapport à $I_{\frac{1}{2}(p+1)}$ on trouvera que cette fonction tend vers zéro, et par suite la proposition en vue est démontrée.

Il reste à montrer que les égalités (14) entraînent l'inégalité (15). Désignons par

$\alpha(x)$ une fonction décroissante tendant vers zéro qui soit constamment supérieure à $|I_n(x)|$ et formons la suite de nombres x_i définis de proche en proche par l'égalité $(x_{i+1} - x_i)^2 = \frac{\alpha(x_i)x_i^3}{[K(x_i)]^2}$; d'après la formule de la moyenne il existe un nombre x'_i compris entre chaque couple de nombres x_i, x_{i+1} pour lequel on a

$$|I'_n(x'_i)| = \frac{|I_n(x_{i+1}) - I_n(x_i)|}{|x_{i+1} - x_i|} < \sqrt{\frac{2\alpha(x_i)}{x_i^3}} K(x_i)$$

et entre x'_i et x'_{i+1} on a encore, en vertu de cette même formule

$$\begin{aligned} |I'_n(x)| &< |I'_n(x'_i)| + |x - x'_i| |I''_n(x'_i)| < \sqrt{\frac{2\alpha(x_i)}{x_i^3}} K(x_i) \\ &+ \left(\frac{\sqrt{\alpha(x_i)x_i^3}}{K(x_i)} + \frac{\sqrt{\alpha(x_{i+1})x_{i+1}^3}}{K(x_{i+1})} \right) \cdot \frac{\lambda(x)[K(x'_i)]^2}{x'_i}. \end{aligned}$$

D'autre part la première condition (C) montre après intégration que $K(x')$ est inférieur au produit de $K(x)$ par $\left(\frac{x'}{x}\right)^{\lambda(x)}$, par suite $\frac{x'_{i+1}}{x'_i}$ étant de la forme $1 + \varepsilon(x)$ on voit que l'on obtient l'égalité (15).

12. La démonstration du théorème II'' est alors bien aisée, en supposant que la fonction $G''(x)$ [ou $H(x)$] vérifie les conditions (A'), (B') et que l'inverse de $2[G''(x)]^{-1}$ [ou de $2[H(x)]^{-1}$] satisfait aux conditions (C). En effet, le lemme du n° 9 montre que s_n est borné, le théorème III' est applicable donc la série sommable L , et d'après ce qui précède elle l'est par toute fonction $K(ax)$, a étant fixe mais aussi grand que l'on veut. On a ainsi l'égalité

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(s - s_{K(x)} - \sqrt{\frac{a}{\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}at^2} \{f[t + K(x)] - f[K(x)]\} dt \right) = 0$$

dans laquelle on peut remplacer les limites d'intégration par $\pm (ax)^{\frac{1}{2}+\alpha}$, dans cet intervalle la quantité entre crochets est inférieure à $2tx^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon(x)$ et l'on obtient

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} (s - s_{K(x)}) < a^{-\frac{1}{2}},$$

ce qui achève la démonstration.

Les conditions imposées à $G''(x)$ ou à $H(x)$ peuvent se simplifier, la première relation (C) entraîne une relation analogue pour $G''(x)$, on a donc en intégrant

$$\frac{G''(x_i)}{G''(x)} = \left(\frac{x_i}{x}\right)^{\lambda(x)}$$

et si dans cette égalité on fait $x_i = x[1 + \varepsilon(x)]$ on obtient

$$G''[x + \varepsilon(x)x] = G''(x) \left(1 + \frac{x_i - x}{x}\right)^{\lambda(x)} = G''(x) \left(1 + \lambda(x) \frac{x_i - x}{x}\right)$$

ce qui montre que la relation (B') est certainement vérifiée. En résumé il suffit que $G''(x)$ satisfasse à la condition (A') et qu'en posant $H(x) = G''(x) + \lambda(x) \frac{\sqrt[3]{G''(x)}}{x}$ l'inverse de $H(x)$ vérifie les conditions (C) .

Les conditions (C) sont vérifiées par toutes les fonctions simples à croissance rationnelle ¹⁰⁾ de sorte que le théorème II'' est valable pour la sommation B par les fonctions $E_\alpha(x)$ et $E(x, \alpha)$ l'énoncé étant alors le même que pour la sommation exponentielle.

§ 4.

13. D'après ce qui a été dit au n° 2 le produit $x^{1+\alpha} G''(x)$ ne saurait être borné lorsque $G''(x)$ est une fonction déduite des coefficients d'une fonction entière, et ceci quel que soit le nombre positif α , $G''(x)$ ne peut donc être égal à $x^{-\beta}$, β étant supérieur à un. Une telle limitation ne s'impose pas dans la méthode de sommation H qui continuera à jouir des propriétés exprimées par les théorèmes I', IV, II''. Il existe ainsi des fonctions $H(x)$ pour lesquelles la sommation H n'est pas analogue à la sommation B . On peut alors rattacher la sommation H à la sommation par des séries entières de rayon de convergence égal à un.

Considérons la série de rayon de convergence un

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty c_n^1 x^n = \sum_0^\infty e^{-G_1(n)} \left(1 + \frac{\lambda(n)}{n} \right) x^n,$$

le quotient de $G_1(x)$ par x tend vers zéro lorsque x croît indéfiniment, nous supposons que $G_1(x)$ est une fonction négative décroissante, dérivable deux fois, la dérivée première $G'_1(x)$ étant négative tandis que $G''_1(x)$ est positif. Nous supposons de plus que $G''_1(x)$ vérifie les conditions (A') et (C) .

Nous dirons que la série de terme général $s_n - s_{n-1}$ est sommable A , de somme s , si l'on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{n=1}^\infty c_n^1 s_n x^n}{\varphi(x)} = s.$$

On pourra démontrer les mêmes propositions qu'aux § précédents, et notamment l'équivalence à la sommation H ou L en prenant comme plus haut $H(x) = G''_1(x) + \lambda(x) \frac{\sqrt[3]{G''_1(x)}}{x}$; en particulier le théorème II'' est applicable à la sommation A .

14. Il est aisé de se rendre compte de la nature de l'extension ainsi réalisée. Le quotient de $G_1(x)$ par x tendant vers zéro la dérivée $G'_1(x)$ admet zéro pour limite inférieure pour x infini, et par suite aussi le produit $x G''_1(x)$; les fonctions $G''_1(x)$ tendent donc vers zéro plus rapidement que les fonctions $G''(x)$ et l'on pourra prendre

¹⁰⁾ loc. cit. 7)

finalement pour $H(x)$ des fonctions dont la croissance est comprise entre celles des fonctions $\frac{(\log x)^3}{\varepsilon(x)x^2}$ et $\frac{\varepsilon(x)}{\log x}$.

Il importe de montrer que les nouveaux modes de sommation obtenus sont utiles (dans le cas où il y a équivalence à la sommation B le fait résulte de ce que la sommation B est utile) je montrerai donc que la sommation A permet, lorsque la fonction $\varphi(x)$ est convenablement choisie de sommer certaines séries divergentes. Supposons que $\varphi(x)$ admette le point un pour point essentiel et n'ait pas d'autre point singulier sur le cercle de convergence, ce qui aura lieu en particulier en prenant $\varphi(x) = E\left(\frac{1}{1-x}\right)$, $E(x)$ étant une fonction entière à coefficients positifs. Considérons d'autre part une série de terme général a_n et telle que la série entière $\sum a_n \zeta^n$ admette le point $\zeta = 1$ pour point régulier, la valeur de la fonction en ce point étant A ; la fonction $\sum s_n \zeta^n$ (s_n désignant toujours la somme des n premiers termes, $s_n = \sum_0^n a_i$) admettra le point $\zeta = 1$ pour pôle simple de résidu A . Dans ces conditions un théorème connu de M. BOREL sur la multiplication des singularités montre que la fonction $\sum c_n^1 s_n x^n$ admettra aussi $x = 1$ pour point essentiel, le développement de LAURENT autour de ce point étant le même que celui de $\varphi(x) \times A$, il suit de là que le quotient par $\varphi(x)$ aura pour limite A lorsque x tendra vers un. La série sera donc sommable A .

15. Dans ce qui précède j'ai fait une hypothèse sur la nature analytique de la fonction sommatrice, mais il est facile de voir que les seules hypothèses sur la régularité de la croissance suffisent, dans certains cas pour assurer la sommabilité, c'est ainsi que la sommation de la progression géométrique de raison un sera toujours possible. Il suffit de montrer la propriété pour la sommation H à laquelle on peut donner la forme commode suivante: la série est sommable H par la fonction $\theta(x)$ satisfaisant à la transformée de (A') si l'on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi} x} \sum_{-\{\theta(x)\}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} q^2} s_{q + \{\theta(x)\}} = s, \quad [\theta(x)] = \text{partie entière de } \theta(x).$$

Comme pour la progression géométrique s_n est égal à $\frac{1 - \zeta^n}{1 - \zeta}$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} x} \sum_{-\{\theta(x)\}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} q^2} s_{q + \{\theta(x)\}} = \frac{1}{1 - \zeta} \frac{1}{\sqrt{\pi} x} \sum_{-\{\theta(x)\}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} q^2} - \frac{1}{1 - \zeta} \frac{\zeta^{\{\theta(x)\}}}{\sqrt{\pi} x} \sum_{-\{\theta(x)\}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} q^2} \zeta^q,$$

le premier terme du second membre a pour limite $\frac{1}{1 - \zeta}$, d'autre part le module de ζ étant égal à un, la somme qui figure dans le second terme est asymptotiquement égale à la même somme prise à partir de la valeur $-\frac{\sqrt{x}}{\varepsilon(x)}$ (théorème I') donc à cette somme prise à partir de la valeur $-x$. Or la progression est sommable par les

moyennes exponentielles, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sum_{-x}^{+\infty} e^{-\frac{q^2}{x}} \zeta^q = 0$$

et par suite la série est sommable H .

En se reportant au n° 3, on voit que l'on a incidemment démontré la propriété suivante :

Si les coefficients de la fonction $F(x)$ vérifient les conditions (A') et (B') on a la relation

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(\zeta x)}{F(x)} = 0 \quad (|\zeta| = 1, \zeta \neq 1).$$

on pourrait énoncer une propriété analogue pour les séries entières.

16. Il est par contre aisé de montrer que la sommation H ne constitue pas un procédé de prolongement analytique satisfaisant aux conditions énoncées au n° 3, car la sommation de la progression géométrique de raison supérieure à un n'est pas possible. D'après ce qui a été dit ci-dessus il suffit de voir que l'expression

$$\frac{\zeta^{[\theta(x)]}}{\sqrt{\pi x}} \sum_{-[\theta(x)]}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} q^2} \zeta^q, \quad |\zeta| > 1$$

ne tend pas vers zéro lorsque x croît indéfiniment. On ne changera pas la limite en remplaçant dans la somme $[\theta(x)]$ par ∞ et l'on aura à considérer le produit

$$\frac{\zeta^{[\theta(x)]}}{\sqrt{\pi x}} F(\zeta, x), \quad F(\zeta, x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x} q^2} \zeta^q.$$

Quels que soient x et ζ la fonction $F(\zeta, x)$ vérifie l'identité

$$F(\zeta, x) = \zeta e^{-\frac{1}{x}} F(\zeta e^{-\frac{1}{x}}, x)$$

supposons alors que ζ soit de la forme $e^{\frac{2}{Q} + 2i\pi\omega}$, $\left(\omega = \frac{R}{Q}\right)$, P, Q, R étant des entiers et ω irréductible, ce qui ne restreint pas la généralité, posons en outre $x = Qy$, on aura en appliquant yP fois l'identité précédente

$$\frac{\zeta^{[\theta(x)]}}{\sqrt{\pi x}} F(\zeta, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi Qy}} \zeta^{[\theta(Qy)]} e^{y\frac{P^2}{Q} + i\omega Py} F(e^{2i\pi\omega}, yQ).$$

Le calcul de $F(e^{2i\pi\omega}, yQ)$ se fait aisément, on a, en utilisant encore une fois le théorème I'

$$F(e^{2i\pi\omega}, yQ) \sim 2 \sum_{\substack{\frac{1}{y} \\ \varepsilon(y)}} u_n,$$

$$u_n = \sum_{nQ}^{(n+1)Q} e^{-\frac{1}{yQ} q^2} \cos 2\pi \frac{qR}{Q} = \frac{1 + \varepsilon(y)}{y} e^{-\frac{1}{yQ} n^2} \left(\frac{1}{2} n(Q - 1) + B \right)$$

par suite

$$F(e^{2i\pi\omega}, y, Q) \sim 2 \sum_0^{\frac{\sqrt{y}}{\varepsilon(y)}} e^{-\frac{1}{yQ} n^2} \frac{1}{y} \left(\frac{1}{2} n(Q-1) + B \right) \sim \frac{1}{2} Q(Q-1)$$

ce qui montre que le produit $\frac{\chi^{[\theta(x)]}}{\sqrt{\pi x}} F(\chi, x)$ croît indéfiniment et démontre la proposition.

Paris, 9 janvier 1917.

G. VALIRON.

SULLE EQUAZIONI INTEGRALI DI PRIMA SPECIE A NUCLEO NON SIMMETRICO.

Nota di **Attilio Vergerio** (Cagliari).

Adunanza del 22 aprile 1917.

In una recente Memoria, inserita in questi Rendiconti ¹⁾, ho svolto l'intera teoria delle equazioni integrali di 1^a e 2^a specie, a nucleo simmetrico, prendendo le mosse da un noto teorema dello SCHMIDT sulla esistenza degli autovalori e delle autofunzioni d'una funzione simmetrica; avvertendo che i risultati ottenuti per le equazioni integrali di 1^a specie si potevano estendere subito a quelle a nucleo qualunque.

A tale asserzione fui condotto da un teorema dimostrato dal LAURICELLA ²⁾ secondo il quale le due equazioni.

$$(\xi) \quad g(s) = \int_a^b K(st) h(t) dt,$$

$$(\eta) \quad g'(s) = \int_a^b \underline{K}(st) h(t) dt,$$

dove $K(st)$ è un nucleo non simmetrico e

$$g'(s) = \int_a^b K(rs) g(r) dr, \quad \underline{K}(st) = \int_a^b K(rs) K(rt) dr,$$

dovrebbero essere equivalenti, nel senso che ogni soluzione della $[\xi]$ lo sia anche della (η) e reciprocamente.

Però il teorema del LAURICELLA sussiste *soltanto* nel caso che la (ξ) ammetta soluzione; perchè può darsi che, pur ammettendo la (η) soluzione, la (ξ) invece non ne ammetta affatto ³⁾. Ne viene di conseguenza che lo studio dell'equazione (ξ) non può

¹⁾ A. VERGERIO *Sulle equazioni integrali del tipo FREDHOLM* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLI (1916), pp. 1-35].

²⁾ G. LAURICELLA, *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1^a specie* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, vol. XX, 1^o semestre 1911, pp. 528-536].

³⁾ Ad esempio, per l'equazione

$$\sin s + \sin 2s = \int_0^{2\pi} \sin(s-t) h(t) dt,$$

sempre ricondursi a quello della corrispondente equazione (η); ed, in particolare, che la condizione data, a p. 22 della mia citata Memoria, come *necessaria e sufficiente* affinché la (ξ) ammetta soluzione è soltanto *necessaria*, ma non *sufficiente*.

Scopo della presente Nota è di colmare questa lacuna.

Anche qui, come fu fatto nella suddetta Memoria, ci serviremo del concetto di *funzione caratteristica* che, in pratica, riesce più vantaggioso di quello di *autofunzione*. Tale vantaggio risulterà manifesto quando si pensi che ad un autovalore del nucleo corrisponde una ed una sola funzione caratteristica, se il nucleo è simmetrico, oppure tutt'al più due, nel caso che non lo sia; mentre accade generalmente il contrario per le autofunzioni linearmente indipendenti relative ad un autovalore.

Per uniformare poi il metodo di trattazione a quello della mia citata Memoria, di cui questa Nota è parte integrante, non faremo uso esplicito delle autofunzioni dello SCHMIDT, pur riconoscendo che il loro impiego potrebbe apportare delle notevoli semplificazioni nella dimostrazione di parecchi teoremi.

La mia Memoria sarà, ove occorra, richiamata colla lettera *M*.

§ I.

Le costanti del nucleo $K(st)$.

Sia $K(st)$ una funzione reale delle variabili reali s e t , definita entro il campo $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, e soddisfacente alle seguenti condizioni:

1°) di essere, in generale, continua, o di avere tutt'al più delle discontinuità tali che, per ogni funzione continua $q(t)$, gli integrali

$$\int_a^b K(st)q(t)dt, \quad \int_a^b K(ts)q(t)dt$$

siano funzioni continue di s ;

2°) che i nuclei

$$\underline{K}_2(st) = \int_a^b K(rs)K(rt)dr, \quad \overline{K}_2(st) = \int_a^b K(sr)K(tr)dr$$

siano funzioni continue di s e t e non identicamente nulle.

la $[\eta]$ corrispondente è data dalla

$$\cos s = \int_0^{2\pi} \cos(s-t)h(t)dt,$$

che ammette la soluzione $h(t) = \frac{1}{\pi} \cos t$. Questa però non soddisfa l'equazione data, come facilmente si può verificare.

Forniamo la successione:

$$\begin{aligned}\bar{K}_1(st) &= K(st), \\ \bar{K}_2(st) &= \int_a^b K(sr) \bar{K}_1(rt) dr, \\ \bar{K}_3(st) &= \int_a^b K(rs) \bar{K}_2(rt) dr, \\ \bar{K}_4(st) &= \int_a^b K(sr) \bar{K}_3(rt) dr, \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{K}_{2n}(st) &= \int_a^b K(sr) \bar{K}_{2n-1}(rt) dr, \\ \bar{K}_{2n+1}(st) &= \int_a^b K(rs) \bar{K}_{2n}(rt) dr, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Posto

$$\bar{U}_{2n} = \int_a^b \int_a^b \{\bar{K}_n(st)\}^2 ds dt,$$

moltiplicando ambo i membri della seguente uguaglianza

$$(1) \quad \bar{K}_n(st) = \int_a^b K(sr) \bar{K}_{n-1}(rt) dr \quad (n \text{ pari})$$

per $\bar{K}_n(st)$ ed integrando rispetto ad ambedue le variabili s e t , s'ottiene

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{U}_{2n} = \int_a^b dt \int_a^b \bar{K}_{n-1}(rt) dr \int_a^b K(sr) \bar{K}_n(st) ds \\ \quad = \int_a^b \int_a^b \bar{K}_{n-1}(rt) \bar{K}_{n+1}(rt) dr dt. \end{cases}$$

Da questa relazione che, come facilmente si verifica, vale anche se l'indice n è dispari, per la disuguaglianza dello SCHWARZ si deduce poi

$$\begin{aligned}\bar{U}_{2n}^2 &\leq \bar{U}_{2n-2} \bar{U}_{2n+2}, \\ \frac{\bar{U}_{2n}}{\bar{U}_{2n-2}} &\leq \frac{\bar{U}_{2n+2}}{\bar{U}_{2n}};\end{aligned}$$

cioè

$$\bar{w}_{n-1} \leq \bar{w}_n,$$

avendo posto

$$\frac{\bar{U}_{2n+2}}{\bar{U}_{2n}} = \bar{w}_n.$$

Si può osservare subito che nessuna delle funzioni $\bar{K}_n(st)$ può essere identicamente nulla. Invero, se fosse $\bar{K}_{n+1}(st) = 0$, dovrebb'essere $\bar{U}_{2n} = 0$ e quindi anche $\bar{K}_n(st) = 0$;

questo ragionamento ripetuto $n - 1$ volte ci condurrebbe all'eguaglianza $\overline{K}_2(st) = 0$, che contraddice l'ipotesi.

Dalla (1), applicando la disuguaglianza di SCHWARZ ed integrando, si ha poi

$$\overline{U}_{2n} \leq \overline{U}_2 \overline{U}_{2n-2},$$

da cui

$$\overline{w}_{n-1} \leq \overline{U}_2;$$

il che ci permette di porre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{w}_n = \overline{\Omega},$$

essendo $\overline{\Omega}$ una quantità finita positiva e non nulla.

Se ora indichiamo con $\overline{\Gamma}_1$ la costante fondamentale del nucleo simmetrico $\overline{K}_2(st)$, cioè il $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{U}_{4n+4}}{\overline{U}_{4n}}$ (M. Capitolo I, § 1), avendosi

$$\frac{\overline{U}_{4n+4}}{\overline{U}_{4n}} = \frac{\overline{U}_{4n+4}}{\overline{U}_{4n+2}} \frac{\overline{U}_{4n+2}}{\overline{U}_{4n}} = \overline{w}_{2n+1} \overline{w}_{2n},$$

sarà al limite

$$\overline{\Gamma}_1 = \overline{\Omega}^2;$$

e quindi

$$\overline{\Omega} = \sqrt{\overline{\Gamma}_1}.$$

Ragionando nello stesso modo sull'altra successione

$$\underline{K}_1(st) = K(st),$$

$$\underline{K}_2(st) = \int_a^b K(rs) \underline{K}_1(rt) dr,$$

$$\underline{K}_3(st) = \int_a^b K(sr) \underline{K}_2(rt) dr,$$

.....

.....

$$\underline{K}_{2n}(st) = \int_a^b K(rs) \underline{K}_{2n-1}(rt) dr,$$

$$\underline{K}_{2n+1}(st) = \int_a^b K(sr) \underline{K}_{2n}(rt) dr,$$

.....

si potrà affermare l'esistenza d'un'altra costante $\underline{\Omega}$ legata alla costante fondamentale $\underline{\Gamma}_1$ del nucleo simmetrico $\underline{K}_2(st)$ dalla relazione

$$\underline{\Omega} = \sqrt{\underline{\Gamma}_1}.$$

Le costanti $\overline{\Omega}$ ed $\underline{\Omega}$ non sono però diverse.

Abbiamo infatti, se n è pari,

$$\begin{aligned}\bar{K}_{n+1}(st) &= \int_a^b K(rs) \bar{K}_n(rt) dr = \int_a^b K(rs) dr \int_a^b K(ru) \bar{K}_{n-1}(ut) du \\ &= \int_a^b \underline{K}_2(su) \bar{K}_{n-1}(ut) du.\end{aligned}$$

Ripetendo l'operazione $\frac{n}{2} - 1$ volte s'arriva all'eguaglianza

$$(3) \quad \bar{K}_{n+1}(st) = \int_a^b \underline{K}_n(rs) K(tr) dr = \underline{K}_{n+1}(ts);$$

da cui, se n è pari,

$$\bar{U}_{2n+2} = \underline{U}_{2n+2}.$$

D'altra parte, supposto n dispari, mutando nella (2) n in $n + 1$, si ha

$$\bar{U}_{2n+2} = \int_a^b \int_a^b \bar{K}_n(rt) \bar{K}_{n+2}(rt) dr dt;$$

e per la (3)

$$\bar{U}_{2n+2} = \int_a^b \int_a^b \underline{K}_n(tr) \underline{K}_{n+2}(tr) dr dt = \underline{U}_{2n+2}.$$

Perciò avendosi, qualunque sia n , $\bar{w}_n = \underline{w}_n$, sarà anche $\bar{\Omega} = \underline{\Omega}$.

D'ora in poi indicheremo con Ω_1 il valore comune delle suddette costanti; e diremo che Ω_1 è la *costante caratteristica fondamentale* del nucleo $K(st)$. È poi quasi superfluo osservare che saranno pure eguali tra di loro le costanti $\bar{\Gamma}_1$ e $\underline{\Gamma}_1$ relative ai nuclei $\bar{K}_2(st)$ e $\underline{K}_2(st)$ rispettivamente, che d'ora in poi indicheremo semplicemente con Γ_1 .

Per quanto fu sopra esposto, s'avrà così l'eguaglianza:

$$\Omega^2 = \Gamma_1.$$

§ 2.

Le funzioni caratteristiche del nucleo $K(st)$.

Riprendiamo la relazione

$$\bar{K}_{4n+1}(st) = \int_a^b K(rs) \bar{K}_{4n}(rt) dr,$$

dividiamone ambo i membri per $\Omega_1^{2n} = \Gamma_1^n$ e passiamo a limite per $n = \infty$. Esistendo determinato finito e non identicamente nullo il

$$\lim_{n=\infty} \frac{K_{4n}(st)}{\Gamma_1^n} = \bar{H}^{(1)}(st),$$

il quale altro non è se non la funzione caratteristica fondamentale del nucleo simmetrico $\overline{K}_2(st)$ (M. Capitolo I, § 1), esisterà pure finito e determinato il limite primo membro; potremo perciò porre.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{K}_{4n+1}(st)}{\Omega_1^{2n}} = \overline{H}^{(1)}(st).$$

La funzione $\overline{H}^{(1)}(st)$, che è legata alla $\overline{H}^{(1)}(st)$ dalla relazione

$$\overline{H}^{(1)}(st) = \int_a^b K(rs) \overline{H}^{(1)}(rt) dr,$$

non può essere identicamente nulla in s e t .

Invero, posto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{K}_{4n+2}(st)}{\Omega_1^{2n}} = \overline{H}_1^{(1)}(st),$$

dividendo ambo i membri della seguente uguaglianza

$$\overline{K}_{4n+2}(st) = \int_a^b K(sr) \overline{K}_{4n+1}(rt) dr$$

per Ω_1^{2n} e passando al limite per $n = \infty$, s'ottiene

$$\overline{H}_1^{(1)}(st) = \int_a^b K(sr) \overline{H}^{(1)}(rt) dr:$$

se fosse identicamente $\overline{H}^{(1)}(st) = 0$, dovrebbe anche essere $\overline{H}_1^{(1)}(st) = 0$; il che, come sappiamo, non può essere.

Inoltre dalla convergenza uniforme della funzione $\frac{\overline{K}_{4n}(st)}{\Omega_1^{2n}}$ verso il limite $\overline{H}^{(1)}(st)$ discende quella, pure uniforme, della funzione $\frac{\overline{K}_{4n+1}(st)}{\Omega_1^{2n}}$ verso il suo limite $\overline{H}^{(1)}(st)$, il quale sarà perciò una funzione continua.

Operando, in modo perfettamente analogo, sull'eguaglianza

$$\underline{K}_{4n+1}(st) = \int_a^b K(sr) \underline{K}_{4n}(rt) dr,$$

si arriva a provare l'esistenza d'un'altra funzione finita, continua e non identicamente nulla

$$\underline{H}^{(1)}(st) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\underline{K}_{4n+1}(st)}{\Omega_1^{2n}},$$

legata alla funzione caratteristica fondamentale $\underline{H}^{(1)}(st)$ del nucleo simmetrico $\underline{K}_2(st)$ dalla relazione

$$\underline{H}^{(1)}(st) = \int_a^b K(sr) \underline{H}^{(1)}(rt) dr.$$

Le funzioni $\overline{\mathbf{H}}^{(1)}(st)$ ed $\underline{\mathbf{H}}^{(1)}(st)$ sono poi legate tra loro dalla uguaglianza

$$\overline{\mathbf{H}}^{(1)}(st) = \underline{\mathbf{H}}^{(1)}(ts),$$

come si vede subito ricordando la (3).

Si dirà che le funzioni $\overline{\mathbf{H}}^{(1)}(st)$ ed $\underline{\mathbf{H}}^{(1)}(st)$ costituiscono la *coppia fondamentale di funzioni caratteristiche* del nucleo $K(st)$.

Porremo poi

$$(4) \quad \begin{cases} \overline{\mathbf{H}}_1^{(1)}(st) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{K}_{4n+3}(st)}{\Omega_1^{24}} = \int_a^b K(rs) \overline{\mathbf{H}}_1^{(1)}(rt) dr, \\ \underline{\mathbf{H}}_1^{(1)}(st) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{4n+3}(st)}{\Omega_1^{24}} = \int_a^b K(sr) \underline{\mathbf{H}}_1^{(1)}(rt) dr; \end{cases}$$

dalle quali si deduce

$$(5) \quad \begin{cases} \overline{\mathbf{H}}^{(1)}(st) = \frac{1}{\Omega_1^2} \int_a^b K(sr) \overline{\mathbf{H}}_1^{(1)}(rt) dr, \\ \underline{\mathbf{H}}^{(1)}(st) = \frac{1}{\Omega_1^2} \int_a^b K(rs) \underline{\mathbf{H}}_1^{(1)}(rt) dr. \end{cases}$$

Da queste relazioni e dalle precedenti se ne deducono poi delle altre di cui faremo uso.

Avendosi infatti

$$\frac{\overline{K}_{4n+1}(st)}{\Omega_1^{2n}} = \int_a^b K(sr) \frac{K_{4n}(rt)}{\Omega_1^{2n}} dr = \int_a^b \frac{\overline{K}_{4n}(sr)}{\Omega_1^{2n}} K(rt) dr,$$

si deduce la relazione

$$\underline{\mathbf{H}}^{(1)}(st) = \int_a^b \overline{\mathbf{H}}^{(1)}(sr) K(rt) dr;$$

ed, in modo analogo, le altre

$$(6) \quad \begin{cases} \underline{\mathbf{H}}_1^{(1)}(st) = \int_a^b \overline{\mathbf{H}}^{(1)}(sr) K(rt) dr, \\ \overline{\mathbf{H}}_1^{(1)}(st) = \int_a^b \underline{\mathbf{H}}^{(1)}(sr) K(rt) dr, \\ \underline{\mathbf{H}}^{(1)}(st) = \frac{1}{\Omega_1^2} \int_a^b \overline{\mathbf{H}}_1^{(1)}(sr) K(rt) dr \end{cases}$$

Similmente dalla relazione

$$\overline{K}_{4n+1}(st) = \int_a^b K(rs) \overline{K}_{4n}(rt) dr = \int_a^b \underline{K}_{4n}(sr) K(tr) dr$$

segono le altre

$$(7) \quad \begin{cases} \overline{\mathbf{H}}^{(1)}(st) = \int_a^b \underline{\mathbf{H}}^{(1)}(sr) K(tr) dr, \\ \overline{\mathbf{H}}_1^{(1)}(st) = \int_a^b \underline{\mathbf{H}}^{(1)}(sr) K(tr) dr, \\ \overline{\mathbf{H}}_1^{(1)}(st) = \int_a^b \underline{\mathbf{H}}_1^{(1)}(sr) K(tr) dr, \\ \overline{\mathbf{H}}^{(1)}(st) = \frac{1}{\Omega_1^2} \int_a^b \underline{\mathbf{H}}_1^{(1)}(sr) K(tr) dr. \end{cases}$$

Possiamo ora a dimostrare il seguente

TEOREMA. — Se le costanti w_n del nucleo $K(st)$ sono eguali tra di loro, sarà qualunque sia n ,

$$K(st) = \frac{K_{4n+1}(st)}{\Omega_1^{2n}};$$

eccettuati al più i punti d'un insieme superficiale di misura nulla.

Basterà ripetere qui la dimostrazione d'un teorema analogo della mia citata Memoria (Cap. I, § 3, Teorema V), ed osservare che, in questo caso, si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Omega_1^{2n}} \int_a^b \int_a^b K(st) \underline{K}_{4n+1}(st) ds dt \\ &= \frac{1}{\Omega_1^{2n}} \int_a^b \int_a^b K(st) ds dt \int_a^b K(sr) \underline{K}_{4n}(rt) dr \\ &= \frac{1}{\Omega_1^{2n}} \int_a^b \int_a^b \underline{K}_2(tr) \underline{K}_{4n}(rt) dr dt \\ &= \frac{1}{\Omega_1^{2n}} \int_a^b \int_a^b [\underline{K}_{2n+1}(rt)]^2 dr dt = \frac{U_{4n+2}}{\Omega_1^{2n}} = \frac{U_{4n+2}}{U_2} = U_2. \end{aligned}$$

§ 3.

Le costanti della funzione $g(s)$.

Se $g(s)$ è una funzione integrabile in (a, b) , si formi la *successione delle funzioni iterate* della $g(s)$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} g_0(s) &= g(s), \\ g_1(s) &= \int_a^b K(st) g_0(t) dt, \\ g_2(s) &= \int_a^b K(ts) g_1(t) dt, \\ &\dots \dots \dots \\ g_{2n}(s) &= \int_a^b K(ts) g_{2n-1}(t) dt, \\ g_{2n+1}(s) &= \int_a^b K(st) g_{2n}(t) dt, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Posto

$$V_n = \int_a^b [g_n(s)]^2 ds,$$

moltiplicando ambo i membri delle seguenti uguaglianze

$$(8) \quad \begin{cases} g_n(s) = \int_a^b K(ts) g_{n-1}(t) dt & (n \text{ pari}), \\ g_n(s) = \int_a^b K(st) g_{n-1}(t) dt & (n \text{ dispari}), \end{cases}$$

per $g_n(s)$ ed integrando da a a b , s'ottiene

$$V_n = \int_a^b g_{n+1}(t) g_{n-1}(t) dt;$$

da cui

$$V_n^2 \leq V_{n+1} V_{n-1},$$

$$\frac{V_n}{V_{n-1}} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n};$$

ed ancora, ponendo $\frac{V_{n+1}}{V_n} = c_n$,

$$c_{n-1} \leq c_n.$$

Se la $g_1(s)$ non è identicamente nulla, le funzioni $g_n(s)$, e quindi anche le costanti V_n , saranno tutte diverse da zero.

Dalle (8) si ha poi

$$V_n \leq U_2 V_{n-1}, \quad \text{cioè} \quad c_n \leq U_2,$$

il che ci permette di scrivere

$$\lim c_n = C;$$

dove C è una quantità finita, positiva non nulla.

La quantità C sarà denominata *costante caratteristica fondamentale* della funzione $g(s)$ rispetto al nucleo $K(st)$.

Si può vedere con facilità il legame esistente tra C ed Ω_1 .

Dall'eguaglianza

$$g_{4n}(s) = \int_a^b \underline{K}_{4n}(st) g(t) dt$$

s'ottiene

$$\frac{g_{4n}(s)}{C^{2n}} = \left(\frac{\Omega_1}{C}\right)^{2n} \int_a^b \frac{\underline{K}_{4n}(st)}{\Omega_1^{2n}} g(t) dt:$$

e poichè le $g_{2n}(s)$ sono le funzioni iterate della $g(s)$ rispetto al nucleo $\underline{K}_2(st)$ e le $\underline{K}_{4n}(st)$ i nuclei iterati d'ordine pari del suddetto nucleo, indicando con $\underline{G}^{(1)}(s)$ la funzione caratteristica di $g(s)$ rispetto a $\underline{K}_2(st)$, sarà al limite per $n = \infty$, ricordando la relazione $\Omega_1^2 = \Gamma_1$,

$$\underline{G}^{(1)}(s) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{\Omega_1}{C}\right)^{2n} \int_a^b \underline{H}^{(1)}(st) g(t) dt.$$

Perciò, se la $g(s)$ non è soluzione dell'equazione

$$\int_a^b \underline{H}^{(1)}(st) \theta(t) dt = 0,$$

sarà

$$C = \Omega_1.$$

Possiamo ora dimostrare il seguente.

TEOREMA. — Se le costanti w_n d'una funzione $K(st)$ sono tutte eguali tra loro, le

costanti c_n relative ad una funzione integrabile qualunque $g(s)$ ed alle sue funzioni iterate ottenute operando con $K(st)$, sono tutte eguali ad Ω_1 per $n \geq 1$.

Si ha infatti, qualunque sia n (§ precedente),

$$K(st) = \frac{K_{4n+1}(st)}{\Omega_1^{2n}},$$

ed, in particolare,

$$\underline{K}_{4n+1}(st) = \frac{K_{4n+1}(st)}{\Omega_1^2}; \quad (n \geq 1);$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per $g_1(s)g(t)dsdt$ ed integrando, s'ottiene

$$V_{2n-1} = \frac{V_{2n+1}}{\Omega_1^2};$$

cioè

$$\Omega_1^2 = \frac{V_{2n+1}}{V_{2n-1}} = c_{2n-1} c_{2n},$$

e quindi

$$c_{2n} = c_{2n-1} = \Omega_1 \quad (n \geq 1).$$

§ 4.

Le funzioni caratteristiche fondamentali della $g(s)$.

Si consideri la relazione

$$g_{4n+1}(s) = \int_a^b \underline{K}_{4n+1}(st)g(t)dt$$

e se ne dividano ambo i membri per $c^{2n} = \Omega_1^{2n}$:

$$\frac{g_{4n+1}(s)}{c^{2n}} = \int_a^b \frac{K_{4n+1}(st)}{\Omega_1^{2n}} g(t)dt.$$

Poichè esiste determinato e finito il limite per $n = \infty$ del secondo membro (§ 2), esisterà pure il limite del primo, che indicheremo con $\underline{G}^{(1)}(s)$: avremo così

$$\underline{G}^{(1)}(s) = \int_a^b \underline{H}^{(1)}(st)g(t)dt.$$

Posto poi

$$\overline{G}^{(1)}(s) = \int_a^b \overline{H}^{(1)}(st)g(t)dt = \int_a^b \underline{H}^{(1)}(ts)g(t)dt,$$

diremo che le funzioni $\overline{G}^{(1)}(s)$ e $\underline{G}^{(1)}(s)$ costituiscono la coppia fondamentale di funzioni caratteristiche della $g(s)$ rispetto al nucleo $K(st)$.

Porremo ancora

$$\begin{aligned} \overline{G}_1^{(1)}(s) &= \int_a^b \overline{H}_1^{(1)}(st)g(t)dt = \int_a^b K(rs)\overline{G}_1^{(1)}(r)dr, \\ \underline{G}_1^{(1)}(s) &= \int_a^b \underline{H}_1^{(1)}(st)g(t)dt = \int_a^b K(sr)\underline{G}_1^{(1)}(r)dr; \end{aligned}$$

Queste relazioni sono manifeste quando si tengano presenti le (4) del § 2.

§ 5.

Il sistema completo delle costanti caratteristiche e delle funzioni caratteristiche del nucleo $K(st)$.

Si consideri il nuovo nucleo

$$F^{(2)}(st) = K(st) - \underline{H}^{(1)}(st),$$

e si operi su di esso come operammo sul nucleo $K(st)$.

Arriveremo così a dimostrare l'esistenza d'un'altra coppia di funzioni caratteristiche $\overline{H}^{(2)}(st)$ ed $\underline{H}^{(2)}(st)$, legate tra di loro dalla relazione

$$\overline{H}^{(2)}(st) = \underline{H}^{(2)}(ts);$$

ed inoltre quella d'un'altra costante caratteristica $\Omega_2 \leq \Omega_1$, tale da essere $\Omega_2^2 = \Gamma_2$, dove Γ_2 è la costante fondamentale del nucleo simmetrico

$$\underline{F}^{(2)}(st) = \int_a^b [K(rs) - \underline{H}^{(1)}(rs)] [K(rt) - \underline{H}^{(1)}(rt)] dr = \underline{K}_2(st) - \underline{H}_1(st).$$

Analogamente pel nucleo

$$F^{(3)}(st) = F^{(2)}(st) - \underline{H}^{(2)}(st) = K(st) - \underline{H}^{(1)}(st) - \underline{H}^{(2)}(st)$$

esisterà una costante fondamentale $\Omega_3 \leq \Omega_2$ ed una coppia di funzioni caratteristiche $\overline{H}^{(3)}(st)$ ed $\underline{H}^{(3)}(st)$, legate dalla relazione

$$\overline{H}^{(3)}(st) = \underline{H}^{(3)}(ts);$$

e così di seguito. Possiamo affermare che

per ogni funzione $K(st)$ esiste una serie di un numero finito od infinito di costanti caratteristiche positive non crescenti ed una successione di coppie di funzioni caratteristiche.

Operando coi nuclei $F^{(v)}(st)$ ($v = 2, 3, \dots$) sulla $g(s)$, verremo a definire una successione di coppie di funzioni caratteristiche $\overline{G}^{(v)}(s)$, $\underline{G}^{(v)}(s)$ della $g(s)$, definite rispettivamente dalle eguaglianze

$$\overline{G}^{(v)}(s) = \int_a^b \overline{H}^{(v)}(st)g(t)dt; \quad \underline{G}^{(v)}(s) = \int_a^b \underline{H}^{(v)}(st)g(t)dt.$$

Si dirà che le coppie $\overline{H}^{(v)}(st)$, $\underline{H}^{(v)}(st)$ e $\overline{G}^{(v)}(s)$, $\underline{G}^{(v)}(s)$ formano il *sistema completo* delle coppie di funzioni caratteristiche delle $K(st)$ e $g(s)$ rispettivamente. Per questi varranno delle relazione analoghe [4], [5], [6] e [7].

Vediamo ora qualche proprietà delle suddette funzioni.

TEOREMA I. — Le funzioni caratteristiche di $K(st)$ sono tra loro ortogonali; cioè si ha, per $\mu \neq \nu$,

$$\int_a^b \underline{H}^{(\nu)}(sr) \underline{H}^{(\mu)}(tr) dr = 0;$$

$$\int_a^b \overline{H}^{(\nu)}(sr) \overline{H}^{(\mu)}(tr) dr = 0.$$

Per la prima di queste relazioni, basterà ricordare che le funzioni $\overline{H}^{(\nu)}(st)$ sono tra loro ortogonali (M. Cap. II, § 2); e che si ha:

$$\begin{aligned} \int_a^b \underline{H}^{(\nu)}(sr) \underline{H}^{(\mu)}(tr) dr &= \int_a^b dr \int_a^b F^{(\nu)}(su) \underline{H}^{(\nu)}(ur) du \int_a^b F^{(\mu)}(tv) \underline{H}^{(\mu)}(vr) dv \\ &= \int_a^b \int_a^b F^{(\nu)}(su) F^{(\mu)}(tv) du dv \int_a^b \underline{H}^{(\nu)}(ur) \underline{H}^{(\mu)}(vr) dr = 0. \end{aligned}$$

In modo simile, si dimostra la seconda.

COROLLARIO. — Le funzioni $\overline{H}_1^{(\nu)}(st)$ sono tra loro ortogonali come pure le funzioni $\underline{H}_1^{(\nu)}(st)$.

TEOREMA II. — Le funzioni caratteristiche della $g(s)$ sono tra loro ortogonali.

Si ha infatti, per ogni $\mu \neq \nu$,

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{G}^{(\nu)}(s) \overline{G}^{(\mu)}(s) ds &= \int_a^b ds \int_a^b \overline{H}^{(\nu)}(sr) g(r) dr \int_a^b \overline{H}^{(\mu)}(st) g(t) dt \\ &= \int_a^b \int_a^b g(r) g(t) dr dt \int_a^b \overline{H}^{(\nu)}(sr) \overline{H}^{(\mu)}(st) ds = 0; \end{aligned}$$

ed analogamente per le $G^{(\nu)}(s)$.

COROLLARIO. — Le funzioni $G_1^{(\nu)}(s)$ sono tra loro ortogonali, come pure le $G_1^{(\nu)}(s)$.

§ 6.

Alcuni teoremi sulle funzioni caratteristiche.

TEOREMA I. — Se la serie

$$\sum_{\nu} \underline{H}^{(\nu)}(st)$$

è uniformemente convergente, sarà

$$K(st) = \sum_{\nu} \underline{H}^{(\nu)}(st), \quad K(ts) = \sum_{\nu} \overline{H}^{(\nu)}(st),$$

eccettuati tutt'al più i punti d'un insieme superficiale di misura nulla.

Posto

$$(9) \quad K(st) - \sum_{\nu} \underline{H}^{(\nu)}(st) = \psi(st),$$

si deduce

$$\underline{K}_2(rt) - \sum_{\nu} \underline{H}_1^{(\nu)}(rt) = \int_a^b K(sr) \psi(st) ds:$$

e poichè la serie $\sum_v \underline{H}_1(r t)$ è uniformemente convergente, il primo membro della precedente uguaglianza dovrà essere nullo (M. Cap. II, § 3, Teorema II); sarà quindi

$$\int_a^b K(s r) \psi(s t) ds = 0.$$

Avendosi poi

$$\underline{H}^{(v)}(s t) = \int_a^b F^{(v)}(s r) \underline{H}^{(v)}(r t) dr = \int_a^b K(s r) \underline{H}^{(v)}(r t) dr,$$

sarà anche

$$\int_a^b \psi(s t) \underline{H}^{(v)}(s t) ds = 0.$$

Moltiplicando ambo i membri della (9) per $\psi(s t) ds dt$ ed integrando s'avrà allora

$$\int_a^b \int_a^b [\psi(s t)]^2 ds dt = 0;$$

da cui si deduce che la $\psi(s t)$ dev'essere identicamente nulla in tutto il campo, eccettuati al più i punti d'un insieme superficiale di misura nulla.

TEOREMA II. — Se la funzione $g(s)$ è definita dalla relazione

$$[A] \quad g(s) = \int_a^b K(t) h(t) dt,$$

la serie

$$\sum_v \frac{\overline{D}^{(v)}}{\Omega_v^2} \left(\overline{D}^{(v)} = \int_a^b [\overline{G}^{(v)}(s)]^2 ds \right)$$

è convergente; e l'altra

$$\sum_v \overline{G}^{(v)}(s)$$

lo sarà assolutamente ed uniformemente.

Dalla [A] si ha intanto, ricordando le [6]

$$\overline{G}^{(v)}(s) = \int_a^b \underline{H}_1^{(v)}(s t) h(t) dt;$$

ed anche per le [7] e [4]

$$\begin{aligned} \overline{D}^{(v)} &= \int_a^b [\overline{G}^{(v)}(s)]^2 ds = \int_a^b ds \int_a^b \overline{H}^{(v)}(s r) g(r) dr \int_a^b \underline{H}_1^{(v)}(s t) h(t) dt \\ &= \int_a^b ds \int_a^b \int_a^b \underline{H}^{(v)}(s u) K(r u) g(r) du dr \int_a^b \underline{H}_1^{(v)}(s t) h(t) dt \\ &= \int_a^b h(t) dt \int_a^b g(r) dr \int_a^b K(r u) \underline{H}_1^{(v)}(u t) du \quad 4) = \int_a^b h(t) dt \int_a^b \underline{H}_1^{(v)}(r t) g(r) dr \\ &= \int_a^b h(t) dt \int_a^b \overline{H}_1^{(v)}(t r) g(r) dr = \int_a^b \overline{G}^{(v)}(t) h(t) dt. \end{aligned}$$

4) Si ricordi che $\int_a^b \underline{H}^{(v)}(s u) \underline{H}_1^{(v)}(s t) ds = \underline{H}_1^{(v)}(u t)$

In modo analogo, dalla $[A]$ si ricava

$$\overline{G}_1^{(v)}(s) = \Omega_v^2 \int_a^b H^{(v)}(st) h(t) dt;$$

ed anche

$$\overline{D}_1^{(v)} = \int_a^b [\overline{G}_1^{(v)}(s)]^2 ds = \Omega_v^2 \int_a^b \overline{G}_1^{(v)}(t) h(t) dt,$$

e quindi

$$\overline{D}_1^{(v)} = \Omega_v^2 \overline{D}^{(v)}.$$

Ricordando che le funzioni $\overline{G}_1^{(v)}(s)$ sono ortogonali, si ha allora per la disuguaglianza di BESSEL,

$$\int_a^b [h(t)]^2 dt \geq \sum_v \left\{ \int_a^b h(t) \frac{\overline{G}_1^{(v)}(t)}{\sqrt{\overline{D}_1^{(v)}}} dt \right\}^2 = \sum_v \frac{(\overline{D}^{(v)})^2}{\overline{D}_1^{(v)}} = \sum_v \frac{\overline{D}^{(v)}}{\Omega_v^2};$$

la serie dell'ultimo membro sarà perciò convergente.

Per la seconda parte del teorema, poniamo

$$\sum_v |\overline{G}^{(v)}(s)| = \sum_\rho \overline{G}^{(v)}(s) - \sum_\sigma \overline{G}^{(v)}(s),$$

dove, per un determinato valore di s , ρ assume quei valori tra $n+1$, $n+2$, ..., $n+m$, che corrispondono a termini positivi della somma, e σ a quelli negativi.

Dall'eguaglianza

$$\overline{G}^{(v)}(s) = \int_a^b \int_a^b K(sr) \frac{\overline{H}_1^{(v)}(rt)}{\Omega_v^2} g(t) dr dt = \int_a^b K(sr) \frac{\overline{G}_1^{(v)}(r)}{\Omega_v^2} dr$$

si deduce:

$$\sum_\rho \overline{G}^{(v)}(s) = \int_a^b K(sr) \sum_\rho \frac{\overline{G}_1^{(v)}(r)}{\Omega_v^2} dr;$$

e, per la disuguaglianza dello SCHWARZ,

$$\sum_\rho \overline{G}^{(v)}(s) \leq \sqrt{\int_a^b K^2(sr) dr} \sqrt{\sum_\rho \frac{\overline{D}_1^{(v)}}{\Omega_v^2}} < \sqrt{\int_a^b K^2(sr) dr} \sqrt{\sum_{v=n}^\infty \frac{\overline{D}^{(v)}}{\Omega_v^2}};$$

dove la serie dell'ultimo membro, per quanto fu dimostrato più sopra, tende allo zero per $n = \infty$.

Ragionando in modo simile sull'altra somma

$$\sum_\sigma \overline{G}^{(v)}(s),$$

si arriva facilmente a dimostrare il teorema.

TEOREMA III. — Se la funzione $g(s)$ è definita dall'eguaglianza

$$(A) \quad g(s) = \int_a^b K(st) h(t) dt,$$

sarà

$$g(s) = \sum_v \overline{G}^{(v)}(s);$$

eccettuati al più i punti d'un insieme di misura nulla.

Dalla $[A]$ si ha infatti

$$\int_a^b K(rs)g(r)dr = \int_a^b \underline{K}_2(st)h(t)dt;$$

e poichè quest'equazione ammette soluzione, dev'essere (M. Cap. III, § 1)

$$\begin{aligned} \int_a^b K(rs)g(r)dr &= \sum_v \int_a^b \underline{H}^{(v)}(st)dt \int_a^b K(rt)g(r)dr = \sum_v \int_a^b \overline{H}^{(v)}(sr)g(r)dr \\ &= \sum_v \int_a^b K(rs)\overline{G}^{(v)}(r)dr; \end{aligned}$$

da cui

$$\int_a^b K(rs)[g(r) - \sum_v \overline{G}^{(v)}(r)]dr = 0,$$

ed anche

$$g(r) - \sum_v \overline{G}^{(v)}(r) = \psi(r),$$

essendo $\psi(r)$ una soluzione dell'equazione

$$\int_a^b K(rs)\psi(r)dr = 0.$$

Avendosi poi

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(r)g(r)dr &= \int_a^b \psi(r)dr \int_a^b K(rt)h(t)dt = 0, \\ \int_a^b \overline{G}^{(v)}(r)\psi(r)dr &= \int_a^b \overline{G}^{(v)}(r)g(r)dr - \int_a^b [\overline{G}^{(v)}(r)]^2 dr = 0, \end{aligned}$$

sarà anche

$$\int_a^b [\psi(r)]^2 dr = 0;$$

e quindi $\psi(r) = 0$, eccettuati al più i punti d'un insieme di misura nulla.

Con ciò il teorema è dimostrato.

§ 7.

Risolubilità dell'equazione integrale di prima specie.

Da quanto precede risulta che se l'equazione

$$(A) \quad g(s) = \int_a^b K(st)h(t)dt$$

ammette soluzione, devono essere necessariamente soddisfatte le seguente condizioni

a) la serie

$$\sum_v \frac{\overline{D}^{(v)}}{\Omega_v^2}$$

dev'essere convergente;

b) la $g(s)$ deve poter mettersi sotto la forma

$$g(s) = \sum_v \overline{G}^{(v)}(s).$$

Dimostreremo ora che le condizioni a) e b) sono anche *sufficienti*.

Osserviamo anzitutto che avendosi

$$\int_a^b \left[\sum_{v=1}^{n+m} \frac{\overline{G}_1^{(v)}(s)}{\Omega_v^2} \right]^2 ds = \sum_{v=1}^{n+m} \frac{\overline{D}_1^{(v)}}{\Omega_v^2} = \sum_{v=1}^{n+m} \frac{\overline{D}^{(v)}}{\Omega_v^2},$$

la successione $\sum_{v=1}^m \frac{\overline{G}_1^{(v)}(s)}{\Omega_v^2}$ sarà convergente in media in (a, b) : esisterà quindi, per un noto teorema di WEYL ⁵⁾, una funzione $h(t)$ sommabile, insieme al suo quadrato, unica e ben determinata, eccettuati i punti d'un insieme di misura nulla, per la quale si ha

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b \left[h(t) - \sum_{v=1}^m \frac{\overline{G}_1^{(v)}(t)}{\Omega_v^2} \right]^2 dt = 0.$$

Da questa, per la disuguaglianza dello SCHWARZ, si deduce

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b K(s, t) \left[h(t) - \sum_{v=1}^m \frac{\overline{G}_1^{(v)}(t)}{\Omega_v^2} \right] dt = 0,$$

cioè

$$\int_a^b K(s, t) h(t) dt = \sum_v \overline{G}^{(v)}(s);$$

e per la condizione b),

$$\int_a^b K(s, t) h(t) dt = g(s)$$

Le a) e b) sono quindi anche *sufficienti*.

Da quanto precede risulta anche che se la serie

$$\sum_v \frac{\overline{G}_1^{(v)}(t)}{\Omega_v^2}$$

è tale che, moltiplicata per $K(s, t)$, sia integrabile termine a termine, essa rappresenterà una soluzione della $[A]$.

In modo perfettamente analogo, si dimostrerebbe che condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione

$$g(s) = \int_a^b K(s, t) h(t) dt$$

⁵⁾ H. WEYL, Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten [Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), pp. 225-245]; cfr. anche E. FISCHER, Sur la convergence en moyenne [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXLIV (1^{er} semestre 1907), pp. 1022-1024].

ammetta soluzione è che la serie

$$\sum_v \frac{D^{(v)}}{\Omega_v^2} \left(D^{(v)} = \int_a^b [\underline{G}^{(v)}(s)]^2 ds \right)$$

sia convergente e che la $g(s)$ possa mettersi sotto la forma

$$g(s) = \sum_v \underline{G}^{(v)}(s).$$

Possiamo considerare ora qualche caso particolare.

I. Le costanti c_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), relative alla funzione $g(s)$, siano tutte eguali tra di loro.

Ripetendo la dimostrazione data per il caso del nucleo simmetrico (M Cap. III, § 2), si arriva a concludere che l'equazione $[A]$ ammette soluzioni, e che una di queste è data dalla

$$h(t) = \frac{g_1(t)}{c_0}.$$

Si troverebbe poi, anche qui, che la condizione posta per le c_n e l'altra che sia

$$g(s) = \frac{g_2(s)}{c_0}$$

sono equivalenti:

II. Le costanti w_n di $K(st)$ siano tutte eguali tra loro.

Dovendo essere, qualunque sia n , (V § 2)

$$K(st) = \frac{K_{4n+1}(st)}{\Omega_1^{2n}}$$

ed anche (§ 3)

$$(10) \quad c_n = \Omega_1 \quad (n \geq 1)$$

sarà, in particolare,

$$K(st) = \frac{K_5(st)}{\Omega_1^2};$$

dalla quale, mediante moltiplicazione per $g(s) h(t) ds dt$ ed integrazione, s'ottiene

$$\Omega_1^2 V_0 = V_2, \quad \Omega_1^2 = c_0 c_1;$$

e quindi

$$c_0 = \Omega_1$$

Perciò condizione *necessaria* affinchè la $[A]$ ammetta soluzione è che si abbia $c_0 = \Omega_1$: essa è poi anche *sufficiente* perchè allora, per la [10], tutte le costanti c_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) saranno tutte eguali.

Osserveremo da ultimo che se $\varphi(s)$ è una funzione integrabile qualunque, ma tale che la serie

$$\sum_v \int_a^b \underline{H}^{(v)}(tr) \varphi(r) dr$$

moltiplicata per $K(st)$ sia integrabile termine a termine, la funzione

$$\theta(t) = \varphi(t) - \sum_v \int_a^b \underline{H}^{(v)}(tr) \varphi(r) dr = \varphi(t) - \sum_v \underline{\Phi}^{(v)}(t)$$

sarà una soluzione dell'equazione

$$\int_a^b K(st) \theta(t) dt = 0.$$

Posto infatti

$$(II) \quad \psi(s) = \int_a^b K(st) \varphi(t) dt,$$

avremo, tenendo conto delle [6],

$$\int_a^b K(st) \left[\varphi(t) - \sum_v \int_a^b \underline{H}^{(v)}(tr) \varphi(r) dr \right] dt = \psi(s) - \sum_v \int_a^b \bar{H}^{(v)}(st) \psi(t) dt;$$

e poichè la [II] ammette soluzione, l'ultimo membro della precedente uguaglianza sarà nullo.

Potremo con ciò affermare che

se $h(t)$ è una soluzione della [A], la soluzione più generale di questa sarà data da

$$\theta(t) = h(t) + \varphi(t) - \sum_v \underline{\Phi}^{(v)}(t).$$

Cagliari, Marzo 1917.

ATTILIO VERGERIO.

NUOVO METODO DI SOMMAZIONE DELLE SERIE: ESTENSIONE DEL METODO DI BOREL.

Memoria di **Gustavo Sannia** (Cagliari).

Adunanza del 27 maggio 1917.

INTRODUZIONE.

I. Fra i vari metodi di sommazione delle serie fin qui considerati, uno dei più cospicui e fecondo di applicazioni è il metodo *esponenziale* di BOREL ¹⁾ (diremo *metodo B*) che considera come somma di una serie

$$\begin{aligned} (1) \quad & u_0 + u_1 + u_2 + \dots \\ \text{l'integrale improprio} \quad & \\ (2) \quad & u = \int_0^\infty e^{-x} \sum_{n=0}^\infty u_n \frac{x^n}{n!} dx. \end{aligned}$$

Per le serie sommabili con esso metodo valgono le proprietà espresse dalle seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} (I) \quad & (u_0 + u_1 + u_2 + \dots) + K = u_0 + \dots + u_{n-1} + (u_n + K) + u_{n+1} + \dots, \\ (II) \quad & (u_0 + u_1 + u_2 + \dots) K = K u_0 + K u_1 + K u_2 + \dots, \\ (III) \quad & (u_0 + u_1 + u_2 + \dots) + (v_0 + v_1 + v_2 + \dots) = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots, \end{aligned}$$

ma non valgono in generale le altre

$$\begin{aligned} (IV) \quad & u_0 + u_1 + u_2 + \dots = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + (u_n + u_{n+1} + \dots), \\ (V) \quad & \left\{ \begin{array}{l} (u_0 + u_1 + u_2 + \dots)(v_0 + v_1 + v_2 + \dots) \\ = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots, \end{array} \right. \end{aligned}$$

le quali, insieme con le precedenti, costituiscono il fondamento dell'algoritmo delle serie convergenti (o almeno di quelle convergenti assolutamente).

¹⁾ E. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*. (Gauthier-Villars, Paris, 1901) cap. III. I risultati del BOREL (relativi alle serie *numeriche*) sono stati in seguito precisati e sviluppati, principalmente da C. H. HARDY. Per una sistematica ed esauriente esposizione cfr. il bel trattato di T. J. l'A. BROMWICH: *An introduction to the theory of infinite series* (Macmilland and Co, London, 1908), art. 99 e seguenti.

2. Un modo di conseguire anche la validità delle (IV) e (V) consiste nell'imporre delle opportune condizioni restrittive alle serie che si considerano.

Così il BOREL ²⁾ ha dimostrato che esse valgano per le serie *assolutamente sommabili*, caratterizzate dalla convergenza *assoluta* dell'integrale improprio (2) e degli infiniti altri analoghi

$$(3) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} \frac{x^n}{n!} dx \quad (r = 1, 2, 3, \dots),$$

(e che perciò formano una classe molto ristretta fra le serie sommabili col metodo B).

Io ho dimostrato ³⁾ che la proprietà (V) sussiste, molto più generalmente, per tutte quelle serie sommabili col metodo B per le quali converge (e semplicemente) *soltanto il primo* degli integrali (3). Esse coincidono con quelle serie che sono sommabili con un altro metodo di sommazione dato dal BOREL ⁴⁾ (diremo metodo B') nel quale si considera come somma di una serie (I) il numero

$$(2') \quad u = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_n) \frac{x^n}{n!}.$$

In una recente Nota ⁵⁾ ho poi dimostrato che neppure per conseguire la validità della (IV) è necessario spingersi fino alle serie assolutamente sommabili; ma che è sufficiente (ed anche necessario) fermarsi alle serie, che ho chiamate *totalmente sommabili*, caratterizzate (fra le serie sommabili col metodo B) dalla convergenza *semplice* degli integrali (3).

3. In questa Memoria io mi propongo di conseguire la validità delle (IV) e (V) (insieme con le altre) per la via opposta a quella fin qui seguita, e che conduce molto più lontano, ossia: anzicchè restringere il campo delle serie sommabili, con limitazioni più o meno restrittive, amplierò (e di molto) il campo stesso, generalizzando le definizioni (2) e (2') di BOREL del numero somma di una serie ⁶⁾.

²⁾ loc. cit. ¹⁾.

³⁾ G. SANNIA, *Nuova trattazione del metodo di BOREL per la sommazione delle serie*. [Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, vol. 52 (1916-17), pp. 67-86].

⁴⁾ loc. cit. ¹⁾ p. 97. Il BOREL ritenne equivalenti le due espressioni (2) e (2') del numero u e quindi i due metodi B e B' HARDY ha fatto rilevare che non son tali Vedasi G. H. HARDY, *Researchy in the theory of divergent series and divergent integrals*. [Quarterly Journal of Mathematics, vol. XXXV, 1904, pp. 22-58]

⁵⁾ G. SANNIA, *Sul metodo di BOREL per la sommazione delle serie*. (Atti della Reale Accademia dei Lincei, serie V, vol. XXVI, 1° semestre 1917, pp. 162-167)

⁶⁾ È questa la via già battuta dal CESÀRO, per uno scopo analogo, e che ha poi condotto al bel metodo di sommazione che porta il Suo nome. Il CESÀRO, passando dal concetto di serie convergente a quello più generale di serie *più volte indeterminata*, conseguì la validità della (V) col teorema: *se le due serie del primo membro della (V) sono r ed s volte indeterminate ed hanno per somma u e v rispettivamente, la serie del secondo membro è $r + s + 1$ volte (al più) indeterminata ed ha per somma $u.v$* . Vedasi È CESÀRO, *Sur la multiplication des séries* [Bulletin des Sciences Mathématiques, 2° série t. XIV (1890), pp. 114-120]

Fissato ad arbitrio un numero intero r , costruiremo un nuovo metodo di somma-
zione, che diremo *metodo di BOREL di ordine r* ed indicheremo con (B, r) ; e lo co-
struiremo assegnando due definizioni equivalenti del numero u somma di una serie,
analoghe alle (2) e (2').

Vedremo (n° 10, 11 e 12) che tutte le serie convergenti (oltre a delle serie in-
determinate) sono sommabili col metodo (B, r) ; sicchè questo metodo è più potente ⁷⁾
del metodo di sommazione *ordinario*.

Vedremo inoltre (n° 13, 14 e 15) che, se una serie è sommabile con uno dei
metodi (B, r) , è pure sommabile con tutti quelli di ordine minore e con ugual somma,
ma non quelli di ordine maggiore in generale; sicchè la potenza dei metodi (B, r)
cresce col decrescere dell'ordine r .

Segue anche da ciò che i metodi (B, r) non sono contraddittori, nè col metodo
ordinario, nè tra di loro.

Infine dalla successione (indefinita in due sensi) formata dai metodi (B, r) .

(4) $\dots, (B, -2), (B, -1), (B, 0), (B, 1), (B, 2), \dots$

trarremo due nuovi metodi di sommazione Bg (n° 18) e Bt (n° 25) che, in certo
senso, sono i *metodi limiti* della successione.

Il primo è più potente ed il secondo è meno potente di tutti i metodi (B, r) .

Naturalmente, il nuovo metodo di sommazione che intendiamo definitivamente
presentare è il metodo Bg , ossia il più potente dei metodi da noi costruiti.

Per fare apprezzare la sua grande potenza, ci basti osservare che i metodi B e B'
di BOREL coincidono rispettivamente coi metodi $(B, 0)$ e $(B, 1)$ e che le serie conver-
genti e le serie assolutamente sommabili del BOREL sono tutte sommabili col metodo
 Bt , che pure è il meno potente dei metodi da noi costruiti.

Il metodo Bg , non solo è di grande potenza, ma ciò che è importante e lo rende
passibile di larghe applicazioni è che esso ammette *tutto* l'algoritmo delle serie assolu-
tamente convergenti (§ 3).

Ci piace rilevare in particolare il teorema V del n° 22, che assicura al nostro
metodo la validità della (V) e che è analogo al teorema di CESÀRO già ricordato in ⁶⁾.

Anche il metodo Bt ammette lo stesso algoritmo (n° 25).

§ 1.

Notazioni, convenzioni, lemmi.

4. Data una serie

(5) $u_0 + u_1 + u_2 + \dots,$

indicheremo con U_n la somma dei suoi primi $n + 1$ termini

(6) $U_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ($n \geq 0$).

⁷⁾ Un metodo X è *più potente* di un metodo Y (e questo è *meno potente* di X) se ogni serie
sommabile col metodo Y è anche sommabile col metodo X ma non viceversa.

Daremo un significato ai simboli u_n e U_n anche per n intero negativo, *convenendo che abbiano il valore zero*:

$$(7) \quad u_n = U_n = 0 \quad (n < 0).$$

Con questa convenzione, la relazione

$$U_n - U_{n-1} = u_n$$

sussisterà per ogni intero n , positivo, nullo o negativo.

Infine indicheremo con u quel numero che in seguito chiameremo *somma* della serie (5) e che rappresenteremo anche con la serie medesima.

5. Insieme con ogni serie numerica (5) considereremo la serie di potenze

$$(9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!}$$

la cui somma, quando è convergente, indicheremo con $u(x)$ o $u^{(0)}(x)$.

Indicheremo poi con

$$(10) \quad u^{(1)}(x), \quad u^{(2)}(x), \dots \text{ e } u^{(-1)}(x), \quad u^{(-2)}(x), \dots$$

rispettivamente le derivate successive e gli integrali iterati di $u(x)$ fra i limiti 0 ed x : sicchè:

$$u^{(r)}(x) = \frac{d}{dx} u^{(r-1)}(x), \quad u^{(r-1)}(x) = \int_0^x u^{(r)}(x) dx.$$

Per la convenzione (7), si ha per ogni intero r (anche negativo),

$$(11) \quad u^{(r)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} \frac{x^n}{n!} \quad (r \text{ intero}).$$

Diremo che (11) è *la serie (di potenze) associata di ordine r alla (5)*.

Considereremo anche le serie di potenze

$$(12) \quad U^{(r)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+r} \frac{x^n}{n!}$$

le cui somme sono legate tra loro come le $u^{(r)}(x)$.

Infine considereremo l'integrale improprio

$$(13) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r)}(x) dx$$

che diremo *integrale associato di ordine r alla (5)*.

Allorchè poi dovremo considerare un'altra serie, come

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots,$$

introdurremo i simboli analoghi V_n , $v^{(r)}(x)$, $V^{(r)}(x)$ con analoghi significati.

Infine diciamo una volta per tutte che: *alla variabile x (che compare qui e in seguito) attribuiremo solo valori positivi, zero incluso.*

6. Il caso che a noi interessa è quello in cui le serie (11) e (12) sono trascendenti intere.

È ben noto che: se una delle $u^{(r)}(x)$ è trascendente intera, tali sono tutte le altre. Lo stesso vale per le $U^{(r)}(x)$.

Ora, confrontando le $u^{(r)}(x)$ e le $U^{(r)}(x)$ tra loro, dimostreremo il

LEMMA I. — *Se le $u^{(r)}(x)$ sono trascendenti intere, tali sono anche le $U^{(r)}(x)$, e viceversa; e si ha inoltre*

$$(14) \quad U^{(r)}(x) - U^{(r-1)}(x) = u^{(r)}(x),$$

$$(15) \quad \frac{d}{dx} [e^{-x} U^{(r-1)}(x)] = e^{-x} u^{(r)}(x).$$

Si ha formalmente:

$$(16) \quad U^{(r)}(x) - U^{(r-1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (U_{n+r} - U_{n+r-1}) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} \frac{x^n}{n!} = u^{(r)}(x),$$

per le (8), (11) e (12); poi

$$\frac{d}{dx} [e^{-x} U^{(r-1)}(x)] = e^{-x} U^{(r)}(x) - e^{-x} U^{(r-1)}(x) = e^{-x} u^{(r)}(x).$$

Ora, se si parte dall'ipotesi che le $U^{(r)}(x)$ siano trascendenti intere, le operazioni eseguite sono effettivamente lecite, e perciò le (14) e (15) risultano dimostrate; e la prima assicura inoltre che anche le $u^{(r)}(x)$ sono trascendenti intere.

Ora partiamo dall'ipotesi che le $u^{(r)}(x)$ siano trascendenti intere. In tal caso le operazioni precedenti non hanno più valore dimostrativo, perchè non tutte sono invertibili, e precisamente: si può passare dall'ultimo membro della (16) fino al secondo, e scrivere

$$(17) \quad u^{(r)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (U_{n+r} - U_{n+r-1}) \frac{x^n}{n!},$$

ma non è lecito passare da questo al primo [senza prima assicurarsi della convergenza delle $U^{(r)}(x)$ ⁸⁾].

Moltiplicando le trascendenti intere (17) e

$$(17') \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!},$$

si ha l'altra

$$(18) \quad e^{-x} u^{(r)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{x^n}{n!},$$

ove

$$\begin{aligned} w_n &= n! \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s}{s!} \cdot \frac{U_{n+r-s} - U_{n+r-1-s}}{(n-s)!} = \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{n}{s} (U_{n+r-s} - U_{n+r-1-s}) \\ &= \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{n}{s} U_{n+r-s} + \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s \binom{n}{s-1} U_{n+r-s} \\ &= U_{n+r} + \sum_{s=1}^n (-1)^s \left[\binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} \right] U_{n+r-s} + (-1)^{n+1} U_{r-1} \end{aligned}$$

⁸⁾ Abbiamo insistito su ciò, perchè il BROMWICH si limita alla verifica formale delle (14) e (15) nel caso $r=1$. Cfr. loc. cit. ¹⁾, art. 114.

ed infine

$$(19) \quad w_n = \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^s \binom{n+1}{s} U_{n+r-s}.$$

Ora la trascendente intera (18) si ottiene derivando, termine a termine, la serie

$$(20) \quad U_{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} w_{n-1} \frac{x^n}{n!},$$

quindi anche questa è trascendente intera, come pure la serie che si ottiene moltiplicandola per e^x . Dico che si ottiene la serie:

$$U^{(r-1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+r-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Evidentemente basta verificare invece che, moltiplicando questa serie per la (17'), si ottiene la serie (20). Ed infatti si ha la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s}{s!} \cdot \frac{U_{n+r-1-s}}{(n-s)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{n}{s} U_{n+r-1-s}$$

che, per la (19), coincide appunto con la (20).

Poichè le $U^{(r)}(x)$ sono trascendenti intere, le (14) e (15) sussistono, come abbiamo dimostrato in principio.

7. LEMMA II. — Sia $f(x)$ una trascendente intera ed $f'(x)$ la sua prima derivata. Se l'integrale improprio

$$(21) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} f'(x) dx$$

è convergente, è pure convergente l'integrale

$$(22) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx;$$

e si ha inoltre

$$(23) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-x} f(x) = 0.$$

OSSERVAZIONE. — Il lemma non è invertibile, ossia dalla convergenza di (22) non segue necessariamente quella di (21) ⁹⁾.

§ 2.

I metodi di sommazione (B, r) e Bg .

8. DEFINIZIONE. — Sia r un numero intero. Diremo che la serie

$$(24) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

⁹⁾ Cfr. HARDY, loc. cit. ¹⁾ oppure BROMWICH, loc. cit. ¹⁾ art. 101.

è sommabile col metodo di BOREL di ordine r , e scriveremo è sommabile (B, r) , quando la serie $U^{(r-1)}(x)$ è una trascendente intera ed esiste ed è finito il

$$(25) \quad \lim_{x=\infty} e^{-x} U^{(r-1)}(x) = u.$$

Questo numero u assumeremo come *somma* della serie.

9. Per il lemma I, possiamo asserire che anche $u^{(r)}(x)$ è trascendente intera e che sussiste la (15). Integrandola tra i limiti 0 e x ed osservando che $U^{(r-1)}(0) = U_{r-1}$, si ha

$$(26) \quad e^{-x} U^{(r-1)}(x) = U_{r-1} + \int_0^x e^{-x} u^{(r)}(x) dx.$$

Per la (25), esiste il limite u del primo membro per $x = \infty$, quindi esiste ed è finito anche quello del secondo, cioè converge l'integrale improprio (13), e si ha

$$(27) \quad u = U_{r-1} + \int_0^\infty e^{-x} u^{(r)}(x) dx.$$

Viceversa: sia $u^{(r)}(x)$ una trascendente intera, sia convergente l'integrale (27) e si definisca il numero u con la (27).

Per il lemma I, anche $U^{(r-1)}(x)$ sarà trascendente intera e sussisterà la (15) e quindi la (26). Inoltre, poichè esiste il limite del secondo membro della (26), ed è u per la (27), esisterà pure il limite del primo membro e si avrà la (25). Dunque la serie (24) è sommabile (B, r) con somma u .

Possiamo dunque trasformare la definizione del n° 8 in quest'altra, del tutto equivalente:

DEFINIZIONE. — Una serie (24) è *sommabile* (B, r) quando la serie associata di ordine r è una trascendente intera e l'integrale associato di ordine r (13) è convergente. La *somma* della serie è il numero u definito dalla (27).

Ci serviremo or dell'una or dell'altra definizione secondo l'opportunità.

Osserviamo subito che, se poniamo $r = 1$ nella prima ed $r = 0$ nella seconda, ritroviamo i metodi di sommazione B e B' del BOREL (n° 2); sicchè questi metodi coincidono rispettivamente coi nostri metodi $(B, 0)$ e $(B, 1)$.

10. Ogni serie convergente con somma u è anche sommabile (B, r) con ugual somma.

Supponiamo infatti che (24) sia convergente con somma u , cioè che sia

$$\lim_{n=\infty} U_n = u.$$

Ciò vuol dire che, dato $\varepsilon > 0$, esiste un intero m (che supporremo maggiore del valore assoluto di $r - 1$) tale che risulti

$$(29) \quad |U_{n+r-1} - u| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per } n \geq m.$$

Ne segue che, essendo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

una trascendente intera, tale sarà pure la serie

$$(30) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (U_{n+r-1} - u) \frac{x^n}{n!} = U^{(r-1)}(x) - u e^x,$$

e quindi anche $U^{(r-1)}(x)$. Resta dunque a dimostrare la (25).

Ed infatti, per la (30), si ha

$$e^{-x} U^{(r-1)}(x) - u = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (U_{n+r-1} - u) \frac{x^n}{n!},$$

da cui

$$|e^{-x} U^{(r-1)}(x) - u| \leq e^{-x} \sum_{n=0}^{m-1} |U_{n+r-1} - u| \frac{x^n}{n!} + e^{-x} \sum_{n=m}^{\infty} |U_{n+r-1} - u| \frac{x^n}{n!},$$

ove m è il numero poc'anzi definito.

Se dunque diciamo K la massima delle quantità

$$|U_{n+r-1} - u| \quad (n = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

ed osserviamo che, per la (29), si ha

$$(31) \quad \sum_{n=m}^{\infty} |U_{n+r-1} - u| \frac{x^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{x^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{2} e^x,$$

otteniamo

$$(32) \quad |e^{-x} U^{(r-1)}(x) - u| < K e^{-x} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Intanto, pel teorema di l'HOSPITAL,

$$(33) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} = 0,$$

quindi esiste un $h > 0$ tale che risulti

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{per } x > h.$$

Ne segue, per la (32) che sarà

$$|e^{-x} U^{(r-1)}(x) - u| < \varepsilon \quad \text{per } x > h,$$

il che dimostra la (25).

II. Una serie divergente (non indeterminata) non è sommabile (B, r) .

La (24) sia divergente e, per fissare le idee, sia

$$(34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = +\infty$$

Se la corrispondente serie di potenze $U^{(r-1)}(x)$ non è una trascendente intera, per ciò solo la serie (24) non è sommabile (B, r) (n° 8). Supponiamo dunque che lo sia. Per la (34), dato un numero $N > 0$, esiste un intero m (che supporremo maggiore del valore assoluto di $r-1$) tale che risulti

$$U_{n+r-1} > N \quad \text{per } n \geq m,$$

quindi

$$U^{(r-1)}(x) = \sum_{n=0}^{m-1} U_{n+r-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=m}^{\infty} U_{n+r-1} \frac{x^n}{n!}$$

$$> -M \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} + N \sum_{n=m}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

ove M è il massimo dei valori assoluti delle U_{n+r-1} ($n = 0, 1, \dots, m-1$); ne segue che

$$e^{-x} U^{(r-1)}(x) > -M e^{-x} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} + N \left(1 - e^{-x} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} \right).$$

Ora, per la (33), il limite del secondo membro per $x = \infty$ è N , quindi il limite del primo, se esiste, non è minore di N ; ma N è arbitrario, dunque detto limite è $+\infty$. Da ciò si conclude che la (24) non è sommabile (B, r) .

12. Ogni metodo (B, r) non può dunque sommare che serie indeterminate (oltre alle convergenti).

Per dimostrare che esistono effettivamente delle serie indeterminate sommabili con esso, e perciò che ogni metodo (B, r) è più potente del metodo di sommazione ordinario, valga l'esempio della serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

che è sommabile (B, r) , per ogni r , ed ha per somma $\frac{1}{2}$.

Per essa, U_n vale 1, se n è pari non negativo, e vale 0 in ogni altro caso; quindi

$$U(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

da cui, derivando o integrando termine a termine fra 0 e x , risulta

$$U^{(r-1)}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{o} \quad U^{(r-1)}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

secondo che r è dispari o pari; quindi in ogni caso

$$\lim_{x=\infty} e^{-x} U^{(r-1)}(x) = \frac{1}{2}.$$

13. Dopo di aver confrontato i metodi (B, r) col metodo ordinario, confrontiamo due metodi (B, r) fra loro.

Ogni serie sommabile (B, r) con somma u è anche sommabile $(B, r-1)$ con ugual somma.

Se la serie (24) è sommabile (B, r) con somma u , è convergente l'integrale (13) e si ha la (27); ne segue (n° 7) che è pure convergente l'integrale

$$(35) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r-1)}(x) dx,$$

e perciò che la (24) è anche sommabile $(B, r-1)$, e che si ha inoltre

$$(36) \quad \lim_{x=\infty} e^{-x} u^{(r-1)}(x) = 0.$$

Rimane a dimostrare che la somma

$$(37) \quad u' = U_{r-2} + \int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r-1)}(x) dx$$

della (24) col metodo $(B, r-1)$ è ancora u . Ed infatti, essendo $u^{(r-1)}(0) = u_{r-1}$, si ha, integrando per parti

$$(38) \quad \int_0^x e^{-x} u^{(r)}(x) dx = e^{-x} u^{(r-1)}(x) - u_{r-1} + \int_0^x e^{-x} u^{(r-1)}(x) dx;$$

quindi, per la (36), si ha, al limite per $x = \infty$,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r)}(x) dx = -u_{r-1} + \int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r-1)}(x) dx;$$

dopo ciò la (37) diventa

$$u' = U_{r-2} + u_{r-1} + \int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r)}(x) dx = U_{r-1} + \int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r)}(x) dx = u.$$

14. Invece: *non ogni serie sommabile $(B, r-1)$ è sommabile (B, r)* . Che una serie possa essere sommabile $(B, r-1)$ e non (B, r) risulta da ciò: che dalla convergenza dell'integrale (35) non segue necessariamente quella dell'integrale (13) (n° 7, osservazione).

Un esempio concreto per $r \neq 0$ ¹⁰⁾ è fornito dalla serie che ha per termine generico

$$(39) \quad u_n = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2rs + r + 1)^{n-r+1}}{(2s + 1)!} \quad 11).$$

Dimostriamolo per via indiretta. Supponiamo che una serie (24) ammetta come serie associata di ordine $r-1$ la trascendente intera

$$u^{(r-1)}(x) = e^x \sin e^{rx},$$

che ha per prima derivata

$$u^{(r)}(x) = e^x \sin e^{rx} + r e^{(1+r)x} \cos e^{rx}.$$

Se si pone

$$e^{rx} = y, \quad x = \frac{1}{r} \log y,$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r-1)}(x) dx &= \frac{1}{r} \int_1^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy, \\ \int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r)}(x) dx &= \frac{1}{r} \int_1^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy + \int_1^{\infty} \cos y dy. \end{aligned}$$

Ora, poichè dei due integrali impropri contenuti nei secondi membri il primo è convergente ed il secondo non lo è (come è ben noto), lo stesso accade degli integrali

¹⁰⁾ Per il caso $r = 0$ vedi 13).

¹¹⁾ Abbiamo ottenuto questo esempio generalizzandone uno di HARDY ($r = 1$).

contenuti nei primi membri; e perciò la serie considerata è sommabile $(B, r-1)$ e non (B, r) .

Resta a verificare che il suo termine generico è espresso dalla (39). Ed infatti, poichè

$$\operatorname{sen} x = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!},$$

si ha

$$f(x) = u^{(r-1)}(x) = e^x \operatorname{sen} e^{rx} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{e^{(2rs+r+1)x}}{(2s+1)!}$$

e, derivando n volte rispetto a x ,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2rs+r+1)^n}{(2s+1)!} e^{(2rs+r+1)x},$$

da cui

$$(40) \quad f^{(n)}(0) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2rs+r+1)^n}{(2s+1)!}.$$

$f^{(n)}(0)$ è il coefficiente di $\frac{x^n}{n!}$ nello sviluppo di MAC-LAURIN di $f(x) = u^{(r-1)}(x)$; ma tale sviluppo è, per la (11),

$$u^{(r-1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r-1} \frac{x^n}{n!},$$

quindi $u_{n+r-1} = f^{(n)}(0)$ ossia $u_n = f^{(n-r+1)}(0)$, da cui la (39).

15. Possiamo precisare quanto abbiamo asserito in principio del n° precedente, dimostrando che: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie (24) sommabile $(B, r-1)$ sia pure sommabile (B, r) è che sia*

$$(41) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} u^{(r-1)}(x) = 0.$$

Infatti, nel dimostrare il teorema del n° 13, abbiamo visto che se una serie (24) è sommabile (B, r) è anche sommabile $(B, r-1)$ e sussiste la (41). Viceversa, supponiamo che la (24) sia sommabile $(B, r-1)$, e quindi che sia convergente l'integrale (35), e che sussista la (41). Allora esisterà il limite del secondo membro della (38) per $x = \infty$, e quindi anche quello del primo, e perciò la (24) sarà sommabile (B, r) .

16. Dai n° 13 e 14 segue che: *se una serie è sommabile col metodo di BOREL di ordine r con somma u , e pure sommabile con tutti quelli di ordine inferiore e con ugual somma; ma, in generale, non è sommabile con quelli di ordine maggiore.*

Dunque: *la potenza dei metodi (B, r) cresce col decrescere dell'ordine r .*

Poi dal n° 15: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie (24) sommabile (B, r) sia pure sommabile col metodo $(B, r+h)$ di ordine maggiore ($h > 0$), è che sia*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} u^{(r+s)}(x) = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, h-1).$$

17. Se una serie è sommabile (B, r) , è anche sommabile $(B, r-1)$, e perciò (n° 15) sussiste la relazione (41); e poichè è anche sommabile $(B, r-2)$, sussisterà

una relazione analoga; e così via. Dunque: *Affinchè una serie sia sommabile* (B, r) *è necessario che sia*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} u^{(r-s)}(x) = 0, \quad (s = 1, 2, 3, \dots).$$

18. Dai risultati dei n° 10 e 16, segue che i metodi (B, r) non sono contraddittori nè col metodo ordinario, nè tra di loro. Dunque è legittima la seguente:

DEFINIZIONE. — Diremo che una serie (24) è *sommabile col metodo di BOREL generalizzato*, e scriveremo è *sommabile* Bg , quando è sommabile con qualcuno dei metodi (B, r) . E diremo *somma* della serie quella somma u che il detto metodo (B, r) le conferisce.

Evidentemente il metodo Bg è più potente di tutti i metodi (B, r) .

§ 3.

Algoritmo dei metodi (B, r) e Bg .

19. TEOREMA I. — *Se una delle due serie*

$$(42) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + (u_n + k) + u_{n+1} + \dots$$

è sommabile (B, r) , *tale è anche l'altra, e la somma della seconda è uguale a quella della prima aumentata di* k .

TEOREMA II. — *Se una delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad k u_0 + k u_1 + k u_2 + \dots \quad (k \neq 0)$$

è sommabile (B, r) , *tale è anche l'altra, e la somma della seconda è uguale a quella della prima moltiplicata per* k .

TEOREMA III. — *Se le due serie*

$$(43) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad v_0 + v_1 + v_2 + \dots,$$

sono sommabili (B, r) *e* (B, s) *con somma* u *e* v *rispettivamente, la serie*

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots$$

è sommabile (B, r) *se* $r \leq s$ *ed ha per somma* $u + v$.

Più generalmente: *la serie*

$$(44) \quad (a u_0 + b v_0) + (a u_1 + b v_1) + \dots$$

è sommabile (B, r) *ed ha per somma* $a u + b v$.

La dimostrazione del teorema II è ben facile.

Passando al teorema III, osserviamo che, essendo $r \leq s$, le serie (43) sono ambedue sommabili (B, r) con somma u, v rispettivamente (n° 16), quindi (n° 8)

$$u = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} U^{(r-1)}(x), \quad v = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} V^{(r-1)}(x),$$

da cui

$$(44') \quad au + bv = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} [a U^{(r-1)}(x) + b V^{(r-1)}(x)];$$

ma, posto $au_n + bv_n = w_n$, la serie (44) può scriversi $w_0 + w_1 + w_2 + \dots$ e dà

$$W_n = a U_n + b V_n, \quad W^{(r-1)}(x) = a U^{(r-1)}(x) + b V^{(r-1)}(x),$$

quindi la (44') esprime che la (44) è sommabile (B, r) con somma $au + bv$.

Infine, applicando il teorema III alle due serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad 0 + 0 + \dots + 0 + k + 0 + 0 + \dots,$$

ove k occupa l' $(n+1)$ esimo posto, si dimostra il teorema I, sol che si osservi che la seconda, essendo convergente con somma k , è anche sommabile (B, r) con ugual somma ($n^\circ 10$).

20. Confrontiamo le due serie:

$$(45) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

$$(46) \quad u_1 + u_2 + \dots$$

Per maggior chiarezza diamo alla seconda la forma

$$(46') \quad v_0 + v_1 + v_2 + \dots,$$

ponendo

$$v_n = u_{n+1} (n \geq 0), \quad v_n = 0 (n < 0).$$

Distinguiamo due casi.

1° Sia r un numero intero positivo.

Se $r > 1$, si ha

$$V_{r-2} = v_0 + v_1 + \dots + v_{r-2} = u_1 + u_2 + \dots + u_{r-1} = U_{r-1} - u_0$$

se $r = 1$, si ha

$$U_{n-1} = u_0, \quad V_{r-2} = V_{-1} = 0 = U_{r-1} - u_0;$$

quindi in ogni caso è

$$(47) \quad V_{r-2} = U_{r-1} - u_0 \quad (r > 0).$$

Inoltre

$$v^{(r-1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n+r-1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} \frac{x^n}{n!} = u^{(r)}(x),$$

quindi i due integrali impropri

$$(48) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} v^{(r-1)}(x) dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r)}(x) dx$$

coincidono, e perciò convergono solamente insieme.

Dunque, se la (45) è sommabile (B, r) , la (46'), ossia la (46), è sommabile $(B, r-1)$; e viceversa.

Supponendo che lo siano e dette u, v le rispettive somme, si ha, per la (47),

$$u = U_{r-1} + \int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r)}(x) dx = V_{r-2} + u_0 + \int_0^{\infty} e^{-x} v^{(r-1)}(x) dx = v + u_0.$$

2° Sia r un numero intero negativo o nullo. Allora, per convenzione (n° 4),
 (49) $U_{r-1} = V_{r-2} = 0$;

inoltre, poichè $v_{n+r-1} = 0$ per $u = 0, 1, \dots, -r$, si ha

$$v^{(r-1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n+r-1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=-r+1}^{\infty} v_{n+r-1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=-r+1}^{\infty} u_{n+r} \frac{x^n}{n!}$$

ossia

$$(50) \quad v^{(r-1)}(x) = u^{(r)}(x) - \sum_{n=0}^{-r} u_{u+r} \frac{x^n}{n!} = u^{(r)}(x) - u_0.$$

Risulta dalla (50) che gli integrali impropri (48) convergono solamente insieme; quindi, se la serie (45) è sommabile (B, r) , la (46'), ossia la (46), è sommabile $(B, r-1)$; e viceversa.

Supponendo che lo siano e dette u, v le rispettive somme, si ha, per la (49),

$$u = \int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r)}(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} v^{(r-1)}(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-x} u_0 dx = v + u_0.$$

Dunque, in ogni caso: se la serie (45) è sommabile (B, r) , la (46) è sommabile $(B, r-1)$ e viceversa; e la somma della seconda serie è uguale a quella della prima diminuita di u_0 .

Ne segue il

TEOREMA IV. — Se la serie

$$(51) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

è sommabile (B, r) con somma u , la serie

$$(52) \quad u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

è sommabile $(B, r-n)$ ed ha per somma $u - u_0 - u_1 - \dots - u_{n-1}$; e viceversa.

21. COROLLARIO I. — Cambiando l'ordine di un numero finito di termini in una serie sommabile (B, r) , essa non si altera, ossia si ha una serie che è pure sommabile (B, r) e con ugual somma.

Si supponga infatti che la (51) sia sommabile (B, r) con somma u , e siano $u'_0, u'_1, \dots, u'_{n-1}$ i suoi primi n termini scritti in un altro ordine qualsiasi. Per il teorema IV, la serie (52) è sommabile $(B, r-n)$ ed ha per somma $u - u_0 - \dots - u_{n-1}$, quindi, per lo stesso teorema (inversamente applicato) la serie

$$u'_0 + u'_1 + \dots + u'_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \dots$$

è sommabile col metodo di BOREL di ordine $(r-n) + n = r$ ed ha per somma

$$u - u_0 - \dots - u_{n-1} + u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u.$$

COROLLARIO II. — Inserendo in una serie sommabile (B, r) un numero finito n di termini, se ha una serie sommabile $(B, r+n)$ ¹²⁾ la cui somma è uguale a quella della

¹²⁾ e quindi (n° 16) anche sommabile (B, r) .

prima aumentata della somma dei termini inseriti; sopprimendo da una serie sommabile (B, r) un numero finito n di termini, si ha una serie sommabile $(B, r - n)$ la cui somma è uguale a quella della prima diminuita della somma dei termini soppressi ¹³).

Questo corollario generalizza il teorema IV ed è una conseguenza del teorema stesso e del corollario I.

COROLLARIO III. — Se in una serie sommabile (B, r) si sostituisce ad un numero finito n di termini la loro somma, si ha una serie sommabile $(B, r - n + 1)$ con ugual somma.

Infatti, se la serie (51) è sommabile (B, r) con somma u , la serie (52) è sommabile $(B, r - n)$ con somma $u - u_0 - \dots - u_{n-1}$ (per il teorema IV), quindi (per il corollario II) la serie

$$(53) \quad (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) + u_n + u_{n+1} + \dots$$

sarà sommabile $(B, r - n + 1)$ con somma u . Ciò dimostra l'enunciata in generale, perchè, per il corollario I, n termini qualunque possono essere portati nei primi n posti.

COROLLARIO IV. — Se in una serie sommabile (B, r) si sostituisce un termine con n altri termini (n finito) di cui esso sia la somma, si ottiene una serie sommabile $(B, r + n - 1)$ con ugual somma.

Si dimostra invertendo il ragionamento precedente.

22. TEOREMA V. — Se le due serie

$$(54) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

sono sommabili (B, r) e (B, s) con somma u e v rispettivamente, la serie

$$(55) \quad w_0 + w_1 + w_2 + \dots,$$

ove

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0,$$

è sommabile (B, t) con somma $w = m$, ove:

1° $t = r + s - 1$, se r e s non sono positivi,

2° t è uguale al non maggiore dei due numeri r, s , se uno almeno di questi è positivo ¹⁴).

¹³) Al n° 14 abbiamo costruita una serie che è sommabile $(B, r - 1)$, ma non (B, r) nell'ipotesi che sia $r \neq 0$. Ora supponendo $r > 0$, se da essa sopprimiamo r termini qualunque, otteniamo una serie sommabile $(B, -1)$ ma non $(B, 0)$, in virtù del corollario II. Ciò dimostra che quanto affermammo al n° 14 vale anche per $r = 0$.

¹⁴) Se si vuole, si può assegnare per t una legge valida in ogni caso:

$$t = -|r| - |s| - 1.$$

Infatti nel 1° caso questa legge coincide con quella data nel testo. Nel secondo, si vede subito che il nuovo valore di t , diciamo t' , non è maggiore di quello t dato nel testo; ora se (55) è sommabile (B, t') sarà pure sommabile (B, t) (n° 16).

Però, a parte l'unicità, la legge del testo è preferibile, perchè nel secondo caso assicura che la (55) è sommabile con un metodo di BOREL di minore potenza.

1° CASO. — Sia $r \leq 0$, $s \leq 0$. Allora, per convenzione (n^0 4), $U_{r-1} = V_{s-1} = 0$; quindi, giusta le ipotesi,

$$u = \int_0^{+\infty} e^{-x} u^{(r)}(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{2a} e^{-x} u^{(r)}(x) dx,$$

$$v = \int_0^{+\infty} e^{-y} v^{(s)}(y) dy = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{2a} e^{-y} v^{(s)}(y) dy,$$

ove $u^{(r)}(x)$, $v^{(s)}(y)$ sono delle trascendenti intere e precisamente (ricordando che $u_n = v_n = 0$ per $n < 0$)

$$(57) \quad \begin{cases} u^{(r)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=r}^{\infty} u_n \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^{n-r}}{(n-r)!}, \\ v^{(s)}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \frac{y^{n-s}}{(n-s)!}. \end{cases}$$

Quindi

$$(58) \quad w = uv = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{2a} e^{-x} u^{(r)}(x) dx \cdot \int_0^{2a} e^{-y} v^{(s)}(y) dy = \lim_{a \rightarrow +\infty} J(a),$$

ove $J(a)$ è l'integrale doppio.

$$J(a) = \int \int e^{-(x+y)} u^{(r)}(x) v^{(s)}(y) dx dy$$

esteso al quadrato del piano (x, y) che ha per vertici i punti

$$O(0, 0), \quad A(2a, 0), \quad B(2a, 2a), \quad C(0, 2a).$$

Eseguendo il cambiamento di variabili

$$x + y = 2\xi, \quad y - x = 2\eta,$$

$J(a)$ si trasforma nell'integrale

$$J(a) = 2 \int \int e^{-2\xi} u^{(r)}(\xi - \eta) v^{(s)}(\xi + \eta) d\xi d\eta$$

esteso al quadrato del piano (ξ, η) che ha per vertici i punti

$$O'(0, 0), \quad A'(a, -a), \quad B'(2a, 0), \quad C'(a, a).$$

Si può anche scrivere

$$(59) \quad J(a) = 2 \int_0^{2a} e^{-2\xi} W(2\xi) d\xi = \int_0^a e^{-\xi} W(\xi) d\xi,$$

ove

$$(60) \quad W(2\xi) = \int_{-\xi}^{\xi} u^{(r)}(\xi - \eta) v^{(s)}(\xi + \eta) d\eta.$$

Per calcolare quest'ultimo integrale incominciamo col formare il prodotto delle due trascendenti intere (57) con la regola (56) di CAUCHY. Otteniamo:

$$(61) \quad u^{(r)}(x) v^{(s)}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, y),$$

ove

$$w_n(x, y) = \sum_{h=0}^n u_h v_{n-h} \frac{x^{h-r} y^{n-h-s}}{(h-r)!(n-h-s)!};$$

quindi

$$(62) \quad u^{(r)}(\xi - \eta) v^{(s)}(\xi + \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\xi - \eta, \xi + \eta),$$

ove

$$(63) \quad w_n(\xi - \eta, \xi + \eta) = \sum_{h=0}^n u_h v_{n-h} \frac{(\xi - \eta)^{h-r} (\xi + \eta)^{n-h-s}}{(h-r)!(n-h-s)!}.$$

La (61) è una serie di polinomii uniformemente convergente nel quadrato $OABC$ ¹⁵), quindi la (62) è una serie di polinomii uniformemente convergente nel quadrato corrispondente $O'A'B'C'$; perciò, fissato ξ , è integrabile termine a termine rispetto a η .

Dunque la (60) può scriversi

$$W(2\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\xi}^{\xi} w_n(\xi - \eta, \xi + \eta) d\eta$$

ossia, per la (63) e poi per la (56),

$$\begin{aligned} W(2\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^n \frac{u_h v_{n-h}}{(h-r)!(n-h-s)!} \int_{-\xi}^{\xi} (\xi - \eta)^{h-r} (\xi + \eta)^{n-h-s} d\eta \quad 16) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^n u_h v_{n-h} \frac{(2\xi)^{n+1-r-s}}{(n+1-r-s)!} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{(2\xi)^{n+1-r-s}}{(n+1-r-s)!}, \end{aligned}$$

da cui

$$W(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{\xi^{n+1-r-s}}{(n+1-r-s)!}.$$

Ora questa è la serie di potenze associata alla (55) di ordine $r+s-1$ (n^0 5); e, poichè dalle (57) e (58) si ha

$$w = uv = \int_0^{\infty} e^{-\xi} W(\xi) d\xi,$$

si conclude che la serie (55) è sommabile $(B, r+s-1)$ ed ha per somma $w = uv$, giusta l'enunciato.

2° CASO. — Uno almeno dei numeri r, s sia positivo

Se r è il non minore fra essi, sarà $r > 0$, mentre

a) $s \leq 0$ oppure b) $s > 0$.

Giusta l'enunciato, dovremo dimostrare, tanto in a) che in b), che la serie (55) è sommabile (B, s) con somma $w = uv$.

¹⁵) Per convincersene, basta riflettere che si può giungere a questa serie, moltiplicando anzitutto termine a termine le due trascendenti intere (57), ottenendo così una serie doppia che è trascendente intera nel piano (x, y) , e perciò uniformemente convergente nel quadrato $OABC$; da questa poi si passa alla (61) associando i termini di ugual grado, il che non altera la sua convergenza uniforme.

¹⁶) Con successive integrazioni per parti, si vede che il valore di questo integrale è

$$\frac{(h-r)!(n-h-s)!}{(n+1-r-s)!} (2\xi)^{n+1-r-s}.$$

a): $s \leq 0$. La serie

$$(64) \quad u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \dots,$$

che si deduce dalla prima delle (54) sopprimendovi i primi r termini, è sommabile $(B, 0)$ con somma $u - u_0 - \dots - u_{r-1}$ (per il teorema IV), quindi la (64) e la seconda delle (54) si trovano nelle condizioni che caratterizzano il 1° caso; dunque la loro serie prodotto

$$(65) \quad v_0 u_r + (v_0 u_{r+1} + v_1 u_r) + (v_0 u_{r+2} + v_1 u_{r+1} + v_2 u_r) + \dots$$

ossia, per la (55), la serie

$$(65') \quad \left\{ \begin{aligned} &[w_r - (v_1 u_{r-1} + v_2 u_{r-2} + \dots + v_r u_0)] \\ &+ [w_{r+1} - (v_2 u_{r-1} + v_3 u_{r-2} + \dots + v_{r+1} u_0)] + \dots \end{aligned} \right.$$

sarà sommabile $(B, 0 + s + 1)$ ossia $(B, s + 1)$, ed avrà per somma

$$(66) \quad v(u - u_0 - u_1 - \dots - u_{r-1}).$$

Inoltre, per il teorema IV,

$$\begin{array}{llll} v_1 + v_2 + \dots & \text{è sommabile } (B, s - 1) & \text{con somma} & v - v_0 \\ v_2 + v_3 + \dots & \text{»} & \text{»} & (B, s - 2) \text{ » } v - v_0 - v_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_r + v_{r+1} + \dots & \text{»} & \text{»} & (B, s - r) \text{ » } v - v_0 - \dots - v_{r-1} \end{array}$$

quindi (n° 16) tutte queste serie sono sommabili col metodo $(B, s - r)$, cioè con quello di ordine minore, e con le medesime somme. Ne segue (per il teorema II) che saranno pure sommabili $(B, s - r)$ le serie

$$v_1 u_{r-1} + v_2 u_{r-1} + \dots, \quad v_2 u_{r-2} + v_3 u_{r-2} + \dots, \quad \dots, \quad v_r u_0 + v_{r+1} u_0 + \dots$$

ed avranno per somma rispettivamente

$$(67) \quad (v - v_0)u_{r-1}, \quad (v - v_0 - v_1)u_{r-2}, \quad \dots, \quad (v - v_0 - \dots - v_{r-1})u_0$$

Sommando termine a termine queste serie e la (65') si ha la serie

$$w_r + w_{r+1} + \dots$$

che perciò (teorema III) sarà pure sommabile $(B, s - r)$ ed avrà per somma il risultato dell'addizione dei numeri (66) e (67) che, come subito si vede, si riduce a

$$uv - (w_0 + w_1 + \dots + w_{r-1})$$

Ne segue, per il teorema IV, che la serie (55) è sommabile (B, s) ed ha per somma uv .

b) Come in a), la serie (64) è sommabile $(B, 0)$ con somma $u - u_0 - \dots - u_{r-1}$. Ora questa serie e la seconda delle (54) si trovano nelle condizioni che caratterizzano il caso a), quindi possiamo asserire che la loro serie prodotto (65') è sommabile $(B, 0)$ ed ha per somma il numero (66).

Giunti a questo punto, la dimostrazione procede come in *a*).

23. I teoremi I, ..., V ci assicurano che le proprietà sintetizzate nelle corrispondenti uguaglianze (I), ..., (V) del n° 1 sussistono per le serie sommabili Bg (n° 18) ed esprimono in modo preciso in qual senso le stesse uguaglianze debbono essere interpretate. Inoltre i corollari I, III, IV del n° 21 ci assicurano che *ad una serie sommabile Bg è lecito applicare le proprietà commutativa, associativa e dissociativa (al finito) senza tema nè di distruggere la sommabilità Bg , nè di alterare la somma della serie.*

Ne concludiamo che: *il metodo Bg ammette tutto l'algoritmo delle serie assolutamente convergenti*, cioè che tutte le operazioni lecite su queste serie sono anche lecite sulle serie sommabili Bg .

Tuttavia è precluso alterare l'ordine dei termini al di là di qualunque posto.

Terminiamo con un teorema che è conseguenza dei precedenti e li sintetizza.

TEOREMA. — *Se si ha un polinomio in un numero finito di variabili $P(u, v, w, \dots)$ e si sostituiscono queste variabili con altrettante serie sommabili Bg , si ottiene (trattando queste serie come se fossero assolutamente convergenti) una serie sommabile Bg che ha per somma il valore che assume il polinomio quando al posto delle variabili si pongono le somme delle serie corrispondenti.*

24. Osserviamo che ciascuno dei metodi (B, r) isolatamente considerato possiede un algoritmo più ristretto, ed in varia misura secondo il valore del suo ordine r .

Precisamente, come risulta dai teoremi I, ..., V e dai corollari del n° 21:

a) Le uguaglianze (I), (II), (III) del n° 1 sussistono; b) la (IV) sussiste solo quando si passa dal secondo membro al primo ¹⁶⁾; c) la (V) sussiste solo per $r > 0$ ¹⁷⁾; d) valgono le proprietà commutativa e dissociativa (al finito) ma non vale la proprietà associativa ¹⁸⁾.

Era logicamente ammissibile l'esistenza di metodi di sommazione nei quali valessero le proprietà commutativa e dissociativa e non la associativa ¹⁹⁾, ma è interessante il fatto che i metodi (B, r) ne offrano esempi concreti.

Ciò vale in particolare pei metodi originari B e B' del BOREL ($r = 0$ e $r = 1$) e ci dà ragione di tutte le proprietà di questi metodi già dimostrate direttamente ²⁰⁾.

¹⁶⁾ Poichè (teorema IV) dell'ipotesi che la serie del secondo membro sia sommabile (B, r) risulta che tale è pure quella del primo membro (anzi è sommabile col metodo, meno potente, di ordine $r + n$); ma dall'ipotesi che questa sia sommabile (B, r) risulta soltanto che l'altra è sommabile col metodo più potente $(B, r - n)$.

¹⁷⁾ Infatti se le due serie del primo membro di (V) sono sommabili (B, r) ed è $r \leq 0$, la serie del secondo membro risulta sommabile solo col metodo $(B, 2r - 2)$, più potente di (B, r) .

¹⁸⁾ Ciò si deduce dai corollari I, III, IV del n° 21, ragionando come in ¹⁶⁾.

¹⁹⁾ Invece non è ammissibile l'esistenza di metodi di sommazione nei quali valgano le proprietà associativa e dissociativa e non la commutativa.

²⁰⁾ Cfr. loc. cit. 3). Però è nuovo il fatto che pei metodi B e B' valgono le proprietà commutativa e dissociativa al finito.

§ 4.

Metodo di sommazione Bt .

25. Risulta dalla definizione del n° 18 e dal n° 16 che una serie è sommabile Bg quando esiste un intero m tale che, per ogni intero $r \leq m$, la serie risulta sommabile (B, r) .

In seguito a ciò, il metodo Bg apparisce come *metodo limite* dei (B, r) per $r = -\infty$; perciò si potrebbe anche indicarlo col simbolo $(B, -\infty)$ e chiamarlo *metodo di BOREL di ordine $-\infty$* .

Or vogliamo considerare il metodo limite dei (B, r) per $r = +\infty$ o *metodo di BOREL di ordine $+\infty$* . Lo indicheremo col simbolo $(B, +\infty)$ oppure Bt .

Diremo che una serie è *sommabile Bt* quando esiste un intero m tale che per ogni intero $r \geq m$ la serie risulti sommabile (B, r) .

Dal n° 16 segue che allora la serie è sommabile (B, r) anche per ogni intero $r < m$; dunque possiamo anche dire che: una serie è *sommabile Bt* quando è sommabile con *tutti* i metodi (B, r) , ossia (n° 8) quando esiste ed è finito il limite di

$$e^{-x} U^{(r-1)}(x)$$

per ogni intero r , oppure (n° 9) quando è convergente l'integrale improprio

$$(68) \quad \int_0^\infty e^{-x} u^{(r)}(x) dx$$

per ogni intero r .

Riconosciamo da ciò che le serie sommabili Bt sono quelle serie che avevamo precedentemente chiamate *totalmente sommabili* (n° 2).

Evidentemente: il metodo Bt è meno potente di ciascun metodo (B, r) e quindi anche del metodo Bg .

Ciò malgrado: esso è più potente del metodo di sommazione ordinario e del metodo B di BOREL così come fu limitato dall'Autore. Perchè ogni serie convergente è pure sommabile con tutti i metodi (B, r) (n° 10) e per le serie assolutamente sommabili l'integrale (68) converge assolutamente per ogni r , (n° 2).

Il metodo Bt ammette tutto l'algoritmo delle serie assolutamente convergenti.

Ciò abbiamo dimostrato direttamente in loc. cit. ⁵⁾; ma risulta anche dai teoremi del § 3.

Infine: il teorema del n° 24 sussiste anche pel metodo Bt .

Cagliari, 12 aprile 1917.

GUSTAVO SANNIA.

SOPRA ALCUNI GRUPPI NOTEVOLI DI TRASFORMAZIONI QUADRATICHE PIANE.

Nota di **Edgardo Ciani** (Genova).

Adunanza dell'11 marzo 1917.

Le trasformazioni quadratiche le quali intendo presentare al Lettore, in questo scritto, hanno la proprietà fondamentale di trasformare in sè stessa la figura composta da due gruppi, di quattro raggi ciascuno, corrispondenti in due fasci proiettivi non concentrici e situati nel medesimo piano. La semplicità estrema di questa configurazione invariante (che è, per così dire, il nucleo dello studio attuale) mette in evidente interesse la considerazione del gruppo generato dalle trasformazioni in parola che è dell'8° ordine se le due quaterne di raggi sono generiche, del 48° se sono armoniche e del 96° se sono equianarmoniche. Le più notevoli di queste trasformazioni sono inversioni di HIRST, altre sono involutorie con 4 punti uniti, le rimanenti hanno il periodo 3, o 4, a seconda dei casi.

Ma l'interesse aumenta pensando alle possibili applicazioni. L'esempio più espressivo viene dato dalla quartica piana con due punti doppi, giacchè è ben noto che le due quaterne di tangenti alla curva, tirate da tali punti, sono proiettive. Nasce dunque l'idea di applicare a tali quaterne le considerazioni svolte in questa Nota, così da far ritenere che le proprietà della configurazione attuale possano cambiarsi in altrettante proprietà della quartica ellittica. Avverto però che un tale cambiamento non sembra nè facile, nè conforme alle più ovvie ed immediate previsioni: oserei dire che anzi si presenta addirittura in contraddizione con proposizioni comunemente accettate (almeno nel caso metrico speciale in cui i centri dei fasci sieno i punti ciclici e quindi la quartica sia bicircolare). Il dimostrare quanto questa contraddizione sia fondata, come e perchè si giustifichi, sarà oggetto di una prossima pubblicazione dedicata esclusivamente alle quartiche piane che sono invarianti rispetto a trasformazioni quadratiche.

IL CASO GENERICO.

1. In un piano abbiansi due quaterne proiettive di raggi:

$$abcd \overline{\wedge} a'b'c'd'$$

in due fasci non sovrapposti e sieno xyz le coordinate omogenee di un punto qualunque del piano. Assumendo due punti fondamentali nei centri F ed F' dei due fasci e il terzo punto fondamentale C_1 nel centro di collineazione della proiettività suddetta, scriveremo:

$$F \equiv (1, 0, 0); \quad F' \equiv (0, 1, 0); \quad C_1 \equiv (0, 0, 1).$$

Allora tale proiettività si può rappresentare esigendo che sieno corrispondenti i due raggi:

$$\lambda y - z = 0, \quad x - \lambda z = 0$$

dove λ è un parametro. La conica k_1 che essa genera è quindi rappresentata da:

$$k_1 \equiv \{xy - z^2 = 0\}.$$

Indicando con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, quattro valori generici del parametro λ , rappresenteremo così le due quaterne $abcd, a'b'c'd'$:

$$\begin{aligned} a &\equiv \{xy - z = 0\}, & b &\equiv \{\beta y - z = 0\}, & c &\equiv \{\gamma y - z = 0\}, & d &\equiv \{\delta y - z = 0\} \\ a' &\equiv \{x - \alpha z = 0\}, & b' &\equiv \{x - \beta z = 0\}, & c' &\equiv \{x - \gamma z = 0\}, & d' &\equiv \{x - \delta z = 0\} \end{aligned}$$

da cui segue:

$$a \cdot a' \equiv (\alpha^2, 1, \alpha); \quad b \cdot b' \equiv (\beta^2, 1, \beta); \quad c \cdot c' \equiv (\gamma^2, 1, \gamma); \quad d \cdot d' \equiv (\delta^2, 1, \delta)$$

ed è ovvio verificare che questi punti esistono sopra k_1 . Ciò premesso si vede facilmente che esiste una inversione quadrica di HIRST che ha il centro in C_1 e per conica fondamentale k_1 , la quale trasforma in se stessa la configurazione descritta sinora subordinando fra i fasci di centri F ed F' la proiettività dianzi menzionata. Questa inversione che indicheremo col simbolo T_1 può rappresentarsi analiticamente con la sostituzione:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} xz & yz & xy \\ x & y & z \end{array} \right\} \equiv T_1$$

da intendersi nel senso che, per attuarla, debbano sostituirsi alle coordinate x, y, z di un punto qualunque, ordinatamente i prodotti xz, yz, xy .

2. Insieme alla inversione T_1 si può constatare, analogamente, l'esistenza di altre tre inversioni T_2, T_3, T_4 , che adempiono un ufficio analogo. Basta perciò osservare che da:

$$abcd \overline{\wedge} a'b'c'd'$$

segue:

$$abcd \overline{\wedge} b'a'd'd'$$

$$abcd \overline{\wedge} c'd'a'b'$$

$$abcd \overline{\wedge} d'c'b'a'$$

e quindi possiamo ripetere, ogni volta, le considerazioni del n° precedente. Indicando ordinatamente con C_2, C_3, C_4 , i centri di queste nuove inversioni e con k_2, k_3, k_4 ,

le relative coniche fondamentali si trova:

$$C_2 \equiv \{\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta), (\alpha + \beta) - (\gamma + \delta), (\alpha\beta - \gamma\delta)\}$$

$$C_3 \equiv \{\alpha\gamma(\beta + \delta) - \beta\delta(\alpha + \gamma), (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta), (\alpha\gamma - \beta\delta)\}$$

$$C_4 \equiv \{\alpha\delta(\beta + \gamma) - \beta\gamma(\alpha + \delta), (\alpha + \delta) - (\beta + \gamma), (\alpha\delta - \beta\gamma)\}$$

e per le coniche fondamentali ordinatamente:

$$(\alpha\beta - \gamma\delta)(\chi^2 + xy) - \{\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta)\}y\chi - \{(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)\}x\chi = 0,$$

$$(\alpha\gamma - \beta\delta)(\chi^2 + xy) - \{\alpha\gamma(\beta + \delta) - \beta\delta(\alpha + \gamma)\}y\chi - \{(\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)\}x\chi = 0,$$

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)(\chi^2 + xy) - \{\alpha\delta(\beta + \gamma) - \beta\gamma(\alpha + \delta)\}y\chi - \{(\alpha + \delta) - (\beta + \gamma)\}x\chi = 0.$$

3. Le formule precedenti possono compendiarsi osservando che se con (m, n, p) si indicano le coordinate di uno qualsiasi dei tre centri C_2, C_3, C_4 , la relativa conica fondamentale è:

$$(2) \quad p(\chi^2 + xy) - my\chi - nx\chi = 0.$$

In tal guisa la corrispondente inversione viene ad essere rappresentata mediante la sostituzione:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} (px - m\chi)(p\chi - my) & (nx - p\chi)(n\chi - py) & (n\chi - py)(px - m\chi) \\ x & y & \chi \end{array} \right\}.$$

Così si può intendere che questa sostituzione serva a rappresentare tutt'e tre le inversioni $T_2 T_3 T_4$: basta perciò porre per m, n, p , le coordinate dei centri rispettivi (n° 2), come per ottenere le rispettive coniche fondamentali basta fare la stessa sostituzione nella equazione (2).

4. Le inversioni $T_1 T_2 T_3 T_4$ sono, a due, a due, permutabili. Consideriamo infatti due qualunque di esse: ad es. $T_1 T_2$.

Servendosi delle (1) e (3) si vede che si ha:

$$(4) \quad T_1 T_2 = T_2 T_1 \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} (p\chi - my)(px - m\chi) & (n\chi - py)(nx - p\chi) & (nx - p\chi)(p\chi - my) \\ x & y & \chi \end{array} \right\}.$$

Si perviene così a una nuova trasformazione quadratica che ha per punti fondamentali F, F' e il punto (mp, np, mn) , e quattro punti uniti che sono quelli comuni alle due coniche degeneri:

$$nx^2 - 2px\chi + m\chi^2 = 0, \quad my^2 - 2py\chi + n\chi^2 = 0.$$

Dalla

$$T_1 T_2 = T_2 T_1$$

segue inoltre:

$$(T_1 T_2)^2 = T_1 T_2 T_2 T_1 \equiv T_1 T_2^2 T_1 = T_1^2 = 1,$$

cioè anche $T_1 T_2$ è involutoria.

5. Consideriamo adesso il prodotto $T_2 T_3 T_1$. Osserveremo perciò che indicando

con $(m_2 n_2 p_2)$, $(m_3 n_3 p_3)$ le coordinate di C_2 e di C_3 e ponendo:

$$\begin{aligned} p_2 p_3 - m_2 n_3 &= q; & m_2 p_3 - m_3 p_2 &= r; \\ n_2 p_3 - p_2 n_3 &= s; & p_2 p_3 - n_2 m_3 &= t; \end{aligned}$$

si trova:

$$T_2 T_3 T_1 \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} (q\tilde{x} + ry)(qx + r\tilde{z}) & (s\tilde{x} + ty)(sx + tz) & (s\tilde{x} + ty)(qx + r\tilde{z}) \\ x & y & \tilde{z} \end{array} \right\}.$$

Ora l'inversione quadrica che ha per centro $(rt, qs, -qt)$ e per conica fondamentale:

$$qt(\tilde{x}^2 + xy) + rty\tilde{z} + qsx\tilde{z} = 0$$

è rappresentata da (n° 3):

$$\left\{ \begin{array}{ccc} t^2(q\tilde{x} + ry)(qx + r\tilde{z}) & q^2(s\tilde{x} + ty)(sx + tz) & -qt(s\tilde{x} + ty)(qx + r\tilde{z}) \\ x & y & \tilde{z} \end{array} \right\}$$

la quale trasformazione coincide con $T_2 T_3 T_1$ purchè si abbia

$$q = -t$$

cioè

$$2p_2 p_3 = m_2 n_3 + n_2 m_3$$

il che si verifica subito ponendo per $m_2 n_2 p_2$, $m_3 n_3 p_3$ i rispettivi valori dati nel n° 2. Dunque, intanto, il prodotto $T_2 T_3 T_1$ è una inversione.

6. Questo fatto induce a ritenere che $T_2 T_3 T_1$ debba coincidere con T_4 . La conferma di questa induzione si ottiene osservando che le condizioni affinché la inversione $T_2 T_3 T_1$ coincida con quella che ha per centro (m, n, p) e per conica fondamentale:

$$p(\tilde{x}^2 + xy) - my\tilde{z} - nx\tilde{z} = 0$$

sono:

$$rt:qs:-qt = m:n:p$$

le quali, a causa di $t = -q$, divengono:

$$ms + rn = 0, \quad tm - pr = 0.$$

Ebbene queste si verificano subito prendendo per m, n, p le coordinate di C_4 (n° 2) e per r, s, t , i rispettivi valori dati nel n° 5.

Dunque effettivamente

$$T_2 T_3 T_1 = T_4,$$

da cui:

$$T_2 T_3 = T_4 T_1.$$

Si conclude quindi:

«Le quattro inversioni $T_1 T_2 T_3 T_4$ sono a due, a due, permutabili. Il prodotto di due qualunque di esse equivale al prodotto delle due rimanenti, come il prodotto di tre qualsiasi equivale alla quarta. Da tali prodotti a due, a due, si ottengono, per conseguenza, tre sole nuove trasformazioni che sono ancora quadraiche e involutorie (ma non inversioni). Aggiungendo l'identità si viene a formare un gruppo G_8 , di ottavo ordine,

rispetto al quale la configurazione attuale è invariante. Esso possiede come sottogruppo quadriminomio invariante quello costituito dai tre prodotti $T_b T_k$ e dall'identità ».

7. Essendo le T_b a periodo due e permutabili fra loro ne segue che ciascuna è invariante rispetto a una qualunque delle rimanenti. Infatti da

$$T_b T_k = T_k T_b$$

segue

$$T_b T_k T_b = T_k T_b^2$$

ma

$$T_b^2 = 1, \quad T_b^{-1} = T_b$$

e quindi

$$T_b^{-1} T_k T_b = T_k.$$

Però bisogna bene intendersi sul valore dell'affermazione precedente. Quando si dice, ad esempio, che T_2 è invariante rispetto a T_1 , ciò significa che se a due punti PQ corrispondenti (secondo la T_2) si applica la T_1 i nuovi punti RS che così si ottengono sono ancora corrispondenti secondo la T_2 medesima. Per indurre poi da ciò che il centro di T_2 rimanga invariato per opera della T_1 , bisognerebbe che alla retta PQ corrispondesse, secondo la T_1 , la retta RS , il che non è perchè T_1 è quadratica e non lineare. È dunque naturale che il centro di T_2 non sia invariante rispetto a T_1 . Il che, del resto, risulta subito anche applicando a tal centro la $T_1^{-1} T_2 T_1$: esso rimarrebbe invariato se fosse un punto unito per T_2 il che non è. D'altra parte è invece indubbio ed evidente che sia invariante rispetto a T_1 la conica fondamentale di T_2 .

8. Mediante le trasposizioni attuate sopra le rette $abcd$, $a'b'c'd'$ delle due quaterne, le trasformazioni del gruppo G_8 descritto al n° 6 possono rappresentarsi con i seguenti simboli:

$$T_1 = (aa')(bb')(cc')(dd')$$

$$T_2 = (ab')(ba')(cd')(dc')$$

$$T_3 = (ac')(bd')(ca')(db')$$

$$T_4 = (ad')(bc')(cb')(da')$$

$$T_1 T_2 = T_2 T_1 = T_3 T_4 = T_4 T_3 = (ab)(cd)(a'b')(c'd')$$

$$T_1 T_3 = T_3 T_1 = T_2 T_4 = T_4 T_2 = (ac)(bd)(a'c')(b'd')$$

$$T_1 T_4 = T_4 T_1 = T_2 T_3 = T_3 T_2 = (ad)(bc)(a'd')(b'c')$$

identità.

Circa poi alla composizione del gruppo attuale si può osservare che « esso è isomorfo oloedrico col gruppo generato dalle quattro omologie armoniche individuate dai vertici e dalle facce di uno stesso tetraedro alle quali omologie vengono ad aggiungersi i loro prodotti a due, a due, cioè le tre involuzioni gobbe che hanno per assi gli spigoli opposti del tetraedro e l'identità ». Le collineazioni di un tal gruppo possono rappresentarsi con la sostituzione:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \pm x_1, & \pm x_2, & \pm x_3, & \pm x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{array} \right\}$$

dove le x_i della linea inferiore sono le coordinate omogenee di un punto generico dello spazio, e venga stabilito che a ciascuna debba esser sostituita la corrispondente della linea superiore combinando i segni in tutti i modi possibili.

9. Abbiamo già osservato al n° 4 che le trasformazioni quadratiche costituite dai prodotti $T_b \cdot T_k$ pure essendo involutorie non sono inversioni e posseggono ciascuna quattro punti uniti che adesso vogliamo meglio considerare. Ad esempio, due punti uniti della $T_1 \cdot T_2$ sono evidentemente quelle due intersezioni M, N , delle coniche k_1, k_2 che sono diverse da F e da F' . I due rimanenti punti uniti PQ esisteranno, manifestamente, sulla retta $C_1 C_2$ componendo su di essa la coppia armonica alle due coppie d'intersezione di tale retta con le coniche k_1 e k_2 . Siccome poi il prodotto $T_3 \cdot T_4$ equivale a $T_1 \cdot T_2$ (n° 6) così ne viene che M, N sono anche i punti d'incontro di l_3 con k_4 (fuori di F ed F') come pure i punti MN esisteranno sulla retta $C_3 C_4$ e comporranno, su di essa, la coppia armonica alle due coppie d'intersezione della retta medesima con le nominate coniche k_3 e k_4 . Si può aggiungere qualche altro particolare. Ad esempio, le coniche k_1 e k_2 sono le seguenti (n° 1 e 2):

$$xy - z^2 = 0$$

$$(x\beta - \gamma\delta)(z^2 + xy) - \{x\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(x + \beta)\}yz - \{(x + \beta) - (\gamma + \delta)\}xz = 0$$

Per individuare i punti M, N , basta osservare che un punto variabile, sopra k_1 , ha per coordinate $(\lambda^2, 1, \lambda)$, quindi M ed N saranno determinati dalla equazione in λ :

$$(5) \{(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)\}\lambda^2 - 2\lambda(\alpha\beta - \gamma\delta) + \alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta) = 0.$$

Ebbene, vogliamo dimostrare che la coppia MN separa armonicamente, sopra k_1 , le due coppie di punti $(a \cdot a', b \cdot b')$; $(c \cdot c', d \cdot d')$. Infatti queste due coppie di punti sono individuate, sopra k_1 , dai valori $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, del parametro λ (n° 1): indicando dunque con λ_1, λ_2 quei valori di λ che individuano la coppia armonica in parola avremo:

$$(\alpha\beta\lambda_1\lambda_2) = -1; \quad (\gamma\delta\lambda_1\lambda_2) = -1$$

cioè:

$$2(\alpha\beta + \lambda_1\lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\alpha + \beta)$$

$$2(\gamma\delta + \lambda_1\lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\gamma + \delta)$$

da cui:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2(\alpha\beta - \gamma\delta)}{(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)}$$

il che prova come λ_1 e λ_2 siano radici della (5) e quindi la nostra affermazione è dimostrata.

Si può dunque concludere che:

« I punti uniti delle tre trasformazioni $T_b \cdot T_k$ sono le 12 intersezioni a due, a due, delle quattro coniche fondamentali k_1, k_2, k_3, k_4 (all'infuori dei punti F ed F'). Sopra ciascuna di tali coniche esistono quindi sei di tali punti componenti il covariante sestico della binaria biquadratica rappresentata dai quattro punti di tal conica in cui s'incontrano i raggi delle due quaterne $abcd, a'b'c'd'$.

I medesimi punti uniti esistono anche, a due a due, sopra i sei lati del quadrangolo completo i cui vertici sono i quattro centri d'inversione e, sopra ciascun lato, compongono la coppia armonica alle due coppie d'intersezione del lato con le due coniche fondamentali relative ai due centri situati sul quel medesimo lato ».

IL CASO ARMONICO.

10. Le due quaterne $abcd \overline{\wedge} a'b'c'd'$ siano armoniche. In tal caso oltre:

$$abcd \overline{\wedge} a'b'c'd' \overline{\wedge} b'a'd'c' \overline{\wedge} c'd'a'b' \overline{\wedge} d'c'b'a'$$

abbiamo anche:

$$abcd \overline{\wedge} a'b'd'c' \overline{\wedge} b'a'c'd' \overline{\wedge} c'd'b'a' \overline{\wedge} d'c'a'b'$$

e quindi, imitando il ragionamento dei n° 1 e 2, si vede che alle inversioni del caso generico vengono ad aggiungersene altre quattro provenienti dal confronto della quaterna $abcd$ con ciascuna delle tre rimanenti della seconda linea precedente.

Per considerare il gruppo di trasformazioni che per tal guisa è generato, cominciamo da scrivere nel modo seguente le trasformazioni del gruppo generico (n° 8):

$$\begin{aligned} T_1 &= (aa')(bb')(cc')(dd'); & T'_1 &= \text{identità} \\ T_2 &= (ab')(ba')(cd')(dc'); & T'_2 &= (ab)(cd)(a'b')(c'd') \\ T_3 &= (ac')(bd')(ca')(db'); & T'_3 &= (ac)(bd)(a'c')(b'd') \\ T_4 &= (ad')(bc')(cb')(da'); & T'_4 &= (ad)(bc)(a'd')(b'c') \end{aligned}$$

Così ciascuna T'_b di sinistra è ottenuta moltiplicando la T_b corrispondente di destra per T_1 .

Nel caso attuale vengono ad aggiungersi, come abbiamo osservato sopra, le seguenti 4 inversioni che scriveremo ponendo di faccia a ciascuna il proprio prodotto per T_1 :

$$\begin{aligned} T_5 &= (aa')(bb')(cd')(dc'); & T'_5 &= (cd)(c'd') \\ T_6 &= (ab')(ba')(cc')(dd'); & T'_6 &= (ab)(a'b') \\ T_7 &= (ac')(bd')(cb')(da'); & T'_7 &= (acbd)(a'd'b'c') \\ T_8 &= (ad')(bc')(ca')(db'); & T'_8 &= (adbc)(a'c'b'd'). \end{aligned}$$

Mediante tutti i prodotti possibili vengono infine ad aggiungersi le seguenti che accoppieremo nel solito modo:

$$\begin{aligned} T_9 &= (ab'ba')(cc'dd'); & T'_9 &= (ab)(c'd') \\ T_{10} &= (aa'bb')(cd'dc'); & T'_{10} &= (cd)(a'b') \\ T_{11} &= (ac'bd')(a'db'c); & T'_{11} &= (ac)(bd)(a'd')(b'c') \\ T_{12} &= (ad'bc')(a'cb'd); & T'_{12} &= (ad)(bc)(a'c')(b'd') \\ T_{13} &= (ab'ba')(cd'dc'); & T'_{13} &= (ab)(cd) \\ T_{14} &= (ac'bd')(a'cb'd); & T'_{14} &= (acbd)(a'c'b'd') \\ T_{15} &= (ad'bc')(a'db'c); & T'_{15} &= (adbc)(a'd'b'c') \\ T_{16} &= (aa'bb')(cc'dd'); & T'_{16} &= (a'b')(c'd') \end{aligned}$$

II. Vogliamo dimostrare che queste sostituzioni formano un gruppo di ordine 32. A tale scopo osserveremo che le 16 sostituzioni T_b permutano fra loro i due fasci di centri F, F' , mentre le altre 16 sostituzioni T'_b li lasciano entrambi invariati. Ebbene, cominceremo dal dimostrare che queste ultime formano un gruppo G_{16} di 16° ordine. Perciò considereremo ogni sostituzione T'_b composta di due: una che opera sopra i raggi $abcd$ di F e l'altra sopra i raggi $a'b'c'd'$ di F' . Scriviamo queste due sostituzioni l'una di faccia all'altra, per ogni T'_b dividendole nelle 4 specie seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{identità} \\ (ab)(cd) \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{identità} \\ (a'b')(c'd') \end{array} \right\} 1^a \text{ specie}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (ac)(bd) \\ (ad)(bc) \end{array} \middle| \begin{array}{l} (a'c')(b'd') \\ (a'd')(b'c') \end{array} \right\} 2^a \text{ specie}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (ab) \\ (cd) \end{array} \middle| \begin{array}{l} (a'b') \\ (c'd') \end{array} \right\} 3^a \text{ specie}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (acb d) \\ (adb c) \end{array} \middle| \begin{array}{l} (a'c' b' d') \\ (a' d' b' c') \end{array} \right\} 4^a \text{ specie}$$

E facile adesso constatare che le 16 sostituzioni T'_b si ottengono associando, in tutti i modi possibili, due sostituzioni del quadro precedente, una di sinistra e una di destra, sottoponendole alla sola condizione di appartenere alla stessa specie. Per scrivere poi le rimanenti 16 sostituzioni T_b basta moltiplicare le 16 sostituzioni T'_b così ottenute per T_1 . Ciò premesso, per dimostrare che le 16 T'_b formano gruppo, consideriamo il prodotto $T'_b T'_k$ di due qualunque di esse e osserviamo che le due sostituzioni di cui si compone ogni T'_b (una sopra $abcd$, l'altra sopra $a'b'c'd'$) sono permutabili. Allora, discutendo tutti i casi possibili, si giunge alle seguenti conclusioni:

Se entrambe le $T'_b T'_k$ sono della stessa specie il prodotto è di 1^a specie.

Se una è di 1^a e una di 2^a il prodotto è di 2^a.

Se una è di 1^a e una di 3^a il prodotto è di 3^a.

» » » » 1^a » » » 4^a » » » 4^a.

» » » » 2^a » » » 3^a » » » 4^a.

» » » » 2^a » » » 4^a » » » 3^a.

» » » » 3^a » » » 4^a » » » 2^a.

È così dimostrato che le 16 sostituzioni T'_b formano un gruppo G_{16} di 16° ordine.

12. Passiamo infine a dimostrare che tutte le 32 sostituzioni descritte al n° 10 formano un gruppo G_{32} . Osserveremo perciò che per definizione si ha:

$$(6) \quad T'_b = T_b T_1$$

da cui, essendo $T_1^2 = 1$,

$$(7) \quad T'_b T_1 = T_b.$$

È poi facile constatare che:

$$(8) \quad T_1 T'_k = T_l$$

Allora il prodotto di due qualunque sostituzioni del n° 10 può presentare i seguenti casi:

$$T'_b \cdot T'_k; \quad T_b \cdot T'_k; \quad T'_b \cdot T_k; \quad T_b T_k.$$

Il primo caso è già stato considerato nel n° 11 e quindi si può scrivere:

$$(9) \quad T'_b \cdot T'_k = T'_l$$

Nel secondo caso, per le (8), (9), si ha:

$$T_b \cdot T'_k = T_1 T'_m T'_k = T_1 T'_n = T_s.$$

Nel terzo caso per le (8), (7), segue:

$$T'_b \cdot T_k = T'_b T_1 T'_m = T_b T'_m.$$

e quindi, ricadendo nel secondo caso, si avrà:

$$T'_b \cdot T_k = T_p.$$

Nel quarto caso per le (7), (8), (6), (9):

$$T_b \cdot T_k = T'_b T_1 T'_k T_1 = T'_b T_l T_1 = T'_b T'_l = T'$$

e il teorema è dimostrato in ogni caso.

13. Il gruppo G_{32} , ora individuato, possiede come sottogruppo invariante il G_{16} formato dalle sostituzioni T'_b , il quale G_{16} funziona in G_{32} in modo perfettamente analogo a quello di un gruppo alterno qualsiasi nel relativo gruppo totale. Un sottogruppo notevole del G_{16} è il G_8 formato dalle:

$$T_1 T_2 T'_3 T'_4 T'_1 T'_2 T'_3 T'_4$$

e questo G_8 contiene a sua volta il sottogruppo quadrimio costituito dalle prime quattro delle sostituzioni precedenti. Un altro sottogruppo notevole del G_{32} è il G_8 del caso generico formato dal gruppo quadrimio precedente con l'aggiunta di $T_1 T_2 T_3 T_4$ etc. etc.

14. Così le 32 trasformazioni T_b , T'_b , del G_{32} sono caratterizzate mediante le sostituzioni che operano sopra le otto rette: $abcd$, $a'b'c'd'$. Si può dimostrare che tali trasformazioni sono tutte quadratiche. Infatti il G_{32} attuale si ottiene aggiungendo al G_8 del caso generico le quattro inversioni $T_5 T_6 T_7 T_8$ (n° 10). Ora tanto queste ultime quanto le trasformazioni che compongono il G_8 , sono tutte quadratiche e biunivoche. Tutti i loro prodotti possibili saranno dunque intanto delle trasformazioni birazionali. V'ha di più: ciascuna delle trasformazioni generanti il G_{32} subordina delle proiettività che scambiano i fasci F ed F' fra loro, o che li trasformano ciascuno in se stesso. Ne segue che anche il prodotto di un numero qualunque di tali trasformazioni generanti G_{32} si potrà sempre riguardare come ottenuto riferendo proiettivamente due

coppie di fasci di raggi il che basta per assicurare che tale prodotto sarà una trasformazione quadratica.

15. Circa al periodo di queste trasformazioni esso è messo in evidenza dai simboli adoperati nel n° 10. Così hanno il periodo due le:

$$T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 T'_2 T'_3 T'_4 T'_5 T'_6 T'_9 T'_{10} T'_{11} T'_{12} T'_{13} T'_{16}$$

mentre le rimanenti (prescindendo dall'identità) hanno il periodo 4. Circa alle prime si può aggiungere che le otto T_i sono inversioni rispetto a coniche non degeneri aventi in comune due punti fondamentali F ed F' . Le $T'_2 T'_3 T'_4 T'_5 T'_6 T'_9 T'_{10} T'_{11} T'_{12}$ non sono inversioni ma però sono sempre involutorie (a 4 punti uniti ciascuna). Finalmente le T'_{13} , T'_{16} sono inversioni rispetto a coniche degeneri in coppie di rette e si può ottenerne la rappresentazione analitica, direttamente, nel modo seguente. Consideriamo la:

$$T'_{16} = (a' b')(c' d').$$

Il simbolo che la rappresenta dice che sono invarianti le rette a, b, c, d , cioè sono invarianti tutte le rette passanti per F . Siccome poi essa è quadratica e involutoria così ne segue che sarà una inversione col centro in F e finalmente poichè subordina intorno a F' l'involuzione individuata dalle coppie $(a' b')$, $(c' d')$, la conica fondamentale della inversione sarà costituita da una coppia di rette passanti per F' . Indichiamone l'equazione complessiva con:

$$h x^2 + 2 k x z + l z^2 = 0.$$

Allora l'inversione che ha il centro in $F \equiv (100)$ e per conica fondamentale la coppia precedente è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -z(kx + lz) & y(hx + kz) & z(hx + kz) \\ x & y & z \end{array} \right\}.$$

Perchè questa coincida con T'_{16} bisogna e basta che sia operata la sostituzione $(a' b')(c' d')$. Ricordando (n° 1) che si ha:

$$a' \equiv \{x - \alpha z = 0\}, \quad b' \equiv \{x - \beta z = 0\},$$

$$c' \equiv \{x - \gamma z = 0\}, \quad d' \equiv \{x - \delta z = 0\}$$

si trovano le condizioni:

$$h\alpha\beta + k(\alpha + \beta) + l = 0$$

$$h\gamma\delta + k(\gamma + \delta) + l = 0$$

da cui si possono ricavare k, k, l , prescindendo da un fattore di proporzionalità che non ha influenza. Si conclude così che

$$\text{la } T'_{16} \text{ trasforma } \left\{ \begin{array}{l} x \text{ in } z\{(\alpha\beta - \gamma\delta)x + [\gamma\delta(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\gamma + \delta)]z\} \\ y \text{ » } y\{[(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)]x + (\gamma\delta - \alpha\beta)z\} \\ z \text{ » } z\{[(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)]x + (\gamma\delta - \alpha\beta)z\}. \end{array} \right.$$

In modo perfettamente analogo si vede che T'_{13} è una inversione col centro in F' e avente per conica fondamentale una coppia di rette passanti per F . La relativa rappresentazione analitica si attua scrivendo che:

$$T'_{13} \text{ trasforma } \begin{cases} x \text{ in } x\{\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta)\}y + (\gamma\delta - \alpha\beta)z\} \\ y \text{ » } z\{\alpha\beta - \gamma\delta\}y + [(\gamma + \delta) - (\alpha + \beta)]z\} \\ z \text{ » } z\{\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta)\}y + (\gamma\delta - \alpha\beta)z\} \end{cases}$$

16. Per ottenere nel modo più semplice le rappresentazioni analitiche delle altre trasformazioni dal G_{32} conviene cercare quelle di T_5 e di T_6 . Perciò si osservi che

$$T_5 = (aa')(bb')(cd')(dc')$$

è una inversione e che può rappresentarsi in modo analogo a quello seguito per le T_2 , T_3 , T_4 del n° 2. La relativa conica fondamentale deve passare per F , F' e per i punti:

$$a \cdot a' = (x^2, 1, \alpha); \quad b \cdot b' = (\beta^2, 1, \beta); \quad c \cdot d' = (\gamma\delta, 1, \gamma); \quad d \cdot c' = (\gamma\delta, 1, \delta)$$

La sua equazione sarà dunque:

$$(\chi^2 + xy)(\alpha + \beta) - 2x\chi - 2\alpha\beta y\chi = 0.$$

Il centro d'inversione (polo di $\chi = 0$) avrà per coordinate $\{2\alpha\beta, 2, (\alpha + \beta)\}$. Allora, come al n° 3, segue che T_5 può rappresentarsi mediante la (3) ossia:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (px - m\chi)(p\chi - my) & (nx - p\chi)(n\chi - py) & (n\chi - py)(px - m\chi) \\ x & y & \chi \end{array} \right\}$$

ponendo:

$$m = 2\alpha\beta, \quad n = 2, \quad p = \alpha + \beta.$$

Se invece si prende:

$$m = 2\gamma\delta, \quad n = 2, \quad p = \gamma + \delta$$

si trova la rappresentazione di T_6 .

Non riescono ugualmente semplici (malgrado le apparenze) le rappresentazioni analitiche delle altre due inversioni T_7 e T_8 quando si cerchino direttamente in modo analogo a quello seguito per T_5 e T_6 .

17. Val meglio cercarle con mezzi più indiretti che indicheremo adesso completando così la rappresentazione analitica di tutte le trasformazioni del G_{32} . Intanto quelle già date si riferiscono alle $T_1 T_2 T_3 T_4$ (n° 1, 2, 3), alle T'_{16} , T'_{13} (n° 15) e alle $T_5 T_6$ (n° 16). Da queste, moltiplicando per T_1 , si trovano le seguenti (a prescindere dall'identità)

$$T_2 T_1 = T'_2; \quad T_3 T_1 = T'_3; \quad T_4 T_1 = T'_4; \quad T_5 T_1 = T'_5; \quad T_6 T_1 = T'_6; \\ T'_{13} \cdot T_1 = T_{13}; \quad T'_{16} \cdot T_1 = T_{16}$$

dopo di che si trovano le rimanenti e precisamente:

$$\begin{aligned} T'_{11} &= T'_{13} \cdot T'_4; & T'_{12} &= T'_{13} \cdot T'_3; & T'_{14} &= T'_4 \cdot T'_5; & T'_{15} &= T'_3 \cdot T'_5 \\ T'_9 &= T'_{15} \cdot T'_{11}; & T'_{10} &= T'_{15} \cdot T'_{12}; & T'_7 &= T'_{15} \cdot T'_{13}; & T'_8 &= T'_{15} \cdot T'_{16} \end{aligned}$$

e infine:

$$\begin{aligned} T_7 &= T'_7 \cdot T_1; & T_8 &= T'_8 \cdot T_1; & T_9 &= T'_9 \cdot T_1; & T_{10} &= T'_{10} \cdot T_1; & T_{11} &= T'_{11} \cdot T_1 \\ T_{12} &= T'_{12} \cdot T_1; & T_{14} &= T'_{14} \cdot T_1; & T_{15} &= T'_{15} \cdot T_1. \end{aligned}$$

e lo scopo è pienamente raggiunto.

18. Si può dunque concludere, riassumendo, che « Nel caso in cui le due quaterne $abcd$, $a'b'c'd'$ sieno armoniche, esistono 31 trasformazioni quadratiche le quali, insieme all'identità, compongono un gruppo G_{32} di 32° ordine rispetto a cui tutta la configurazione è invariante. Otto di queste trasformazioni sono inversioni di HIRST rispetto a coniche non degeneri, due sono inversioni rispetto a coppie di rette, altre nove sono pure involutorie, ma non inversioni; le rimanenti 12 (prescindendo dall'identità) hanno il periodo 4 ».

« Sedici di queste trasformazioni permutano fra loro i due gruppi $abcd$, $a'b'c'd'$: le sedici rimanenti li lasciano entrambi invariati e costituiscono quindi un sottogruppo G_{16} che è il più notevole fra i sottogruppi del G_{32} suddetto ».

IL CASO EQUIANARMONICO.

19. Le due quaterne $abcd$ $\overline{\wedge}$ $a'b'c'd'$ sieno equianarmoniche. Allora alle solite proiettività del caso generico:

$$abcd \overline{\wedge} a'b'c'd' \overline{\wedge} b'a'd'c' \overline{\wedge} c'd'a'b' \overline{\wedge} d'c'b'a'$$

vengono ad aggiungersi quest'altre:

$$\begin{aligned} abcd \overline{\wedge} a'c'd'b' \overline{\wedge} a'd'b'c' \overline{\wedge} c'b'd'a' \overline{\wedge} d'b'c'a' \overline{\wedge} \\ \overline{\wedge} b'd'c'a' \overline{\wedge} d'a'c'b' \overline{\wedge} b'c'a'd' \overline{\wedge} c'a'b'd' \end{aligned}$$

e quindi ripetendo il ragionamento dei n° 1 e 2 si vede che, in questo caso, si aggiungono altre otto inversioni. Per rappresentarle simbolicamente nel modo più adatto insieme a tutte le altre trasformazioni che si generano dai loro prodotti, riprendiamo le notazioni del n° 10 scrivendo nuovamente, anzitutto, le sostituzioni del gruppo generico:

$$\begin{aligned} T_1 &= (aa')(bb')(cc')(dd'); & T'_1 &= \text{identità} \\ T_2 &= (ab')(ba')(cd')(dc'); & T'_2 &= (ab)(cd)(a'b')(c'd') \\ T_3 &= (ac')(bd')(ca')(db'); & T'_3 &= (ac)(bd)(a'c')(b'd') \\ T_4 &= (ad')(bc')(cb')(da'); & T'_4 &= (ad)(bc)(a'd')(b'c'). \end{aligned}$$

Nel caso attuale le otto inversioni in parola sono le seguenti otto di sinistra. Di faccia a ciascuna è indicato, come al solito, il relativo prodotto per T_1 .

$$\begin{array}{ll}
 T_5 = (aa')(bc')(cd')(db'); & T'_5 = (bcd)(b'd'c') \\
 T_6 = (aa')(bd')(cb')(dc'); & T'_6 = (bdc)(b'c'd') \\
 T_7 = (ac')(bb')(cd')(da'); & T'_7 = (acd)(a'd'c') \\
 T_8 = (ad')(bb')(ca')(dc'); & T'_8 = (adc)(a'c'd') \\
 T_9 = (ab')(bd')(cc')(da'); & T'_9 = (abd)(a'b'd') \\
 T_{10} = (ad')(ba')(cc')(db'); & T'_{10} = (adb)(a'b'd') \\
 T_{11} = (ab')(bc')(ca')(dd'); & T'_{11} = (abc)(a'c'b') \\
 T_{12} = (ac')(ba')(cb')(dd'); & T'_{12} = (acb)(a'b'c').
 \end{array}$$

Infine, da tutti i possibili prodotti di queste 24 nascono le seguenti 72 che seguiranno a scrivere, come per l'innanzi, cioè ponendo di faccia a ciascuna di sinistra il proprio prodotto per T_1 :

$$\begin{array}{ll}
 T_{13} = (ac'cb')(a'dd'b); & T'_{13} = (acb)(a'd'b') \\
 T_{14} = (ad'db')(a'cc'b); & T'_{14} = (adb)(a'c'b') \\
 T_{15} = (ab'dd')(a'bc'c); & T'_{15} = (abc)(a'b'd') \\
 T_{16} = (ab'cc')(a'bd'd); & T'_{16} = (abd)(a'b'c') \\
 T_{17} = (ad'ca')(bb'dc'); & T'_{17} = (adc)(b'd'c') \\
 T_{18} = (aa'dc')(bd'cb'); & T'_{18} = (bdc)(a'd'c') \\
 T_{19} = (ac'da')(bb'cd'); & T'_{19} = (acd)(b'c'd') \\
 T_{20} = (aa'cd')(bc'db'); & T'_{20} = (bcd)(a'c'd') \\
 T_{21} = (ad'dc')(a'bb'c); & T'_{21} = (adc)(a'b'c') \\
 T_{22} = (ab'bc')(a'dd'c); & T'_{22} = (abc)(a'd'c') \\
 T_{23} = (ad'ba')(cc'db'); & T'_{23} = (adb)(b'c'd') \\
 T_{24} = (aa'db')(bc'cd'); & T'_{24} = (bcd)(a'd'b') \\
 T_{25} = (ac'dd')(ba'cb'); & T'_{25} = (acb)(a'c'd') \\
 T_{26} = (ac'bb')(a'cd'd); & T'_{26} = (acd)(a'c'b') \\
 T_{27} = (aa'bd')(cb'dc'); & T'_{27} = (bdc)(a'b'd') \\
 T_{28} = (ab'da')(bd'cc'); & T'_{28} = (abd)(b'd'c') \\
 T_{29} = (ab'bd')(cc'da'); & T'_{29} = (abd)(a'c'd') \\
 T_{30} = (ac'cd')(a'bb'd); & T'_{30} = (acd)(a'b'd') \\
 T_{31} = (aa'cb')(bd'dc'); & T'_{31} = (bdc)(a'c'b') \\
 T_{32} = (ac'ba')(cb'dd'); & T'_{32} = (acb)(b'd'c')
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
T_{33} = (a a' b c')(c d' d b'); & T'_{33} = (b c d)(a' b' c') \\
T_{34} = (a b' c a')(b c' d d'); & T'_{34} = (a b c)(b' c' d') \\
T_{35} = (a d' c c')(b a' d b'); & T'_{35} = (a d b)(a' d' c') \\
T_{36} = (a d' b b')(c a' d c'); & T'_{36} = (a d c)(a' d' b') \\
T_{37} = (a c' b d')(a' d b' c); & T'_{37} = (a c)(b d)(a' d')(b' c') \\
T_{38} = (a d' c b')(a' b c' d); & T'_{38} = (a d)(b c)(a' b')(c' d') \\
T_{39} = (a b' d c')(a' c d' b); & T'_{39} = (a b)(c d)(a' c')(b' d') \\
T_{40} = (a d' b c')(a' c b' d); & T'_{40} = (a d)(b c)(a' c')(b' d') \\
T_{41} = (a b' c d')(a' d c' b); & T'_{41} = (a b)(c d)(a' d')(b' c') \\
T_{42} = (a c' d b')(a' b d' c); & T'_{42} = (a c)(b d)(a' b')(c' d') \\
T_{43} = (a b' b a')(c d' d c'); & T'_{43} = (a b)(c d) \\
T_{44} = (a c' c a')(b d' d b'); & T'_{44} = (a c)(b d) \\
T_{45} = (a d' d a')(b c' c b'); & T'_{45} = (a d)(b c) \\
T_{46} = (a a' b b')(c c' d d'); & T'_{46} = (a' b')(c' d') \\
T_{47} = (a a' c c')(b b' d d'); & T'_{47} = (a' c')(b' d') \\
T_{48} = (a a' d d')(b b' c c'); & T'_{48} = (a' d')(b' c').
\end{array}$$

20. Si hanno così 96 sostituzioni le quali, come dimostreremo, formano un gruppo G_{96} di ordine 96. Osserveremo anzitutto che le 48 T'_h di destra del quadro precedente lasciano invariati ciascuno dei due gruppi $abcd$, $a'b'c'd'$, mentre le 48 T_h di sinistra li scambiano fra loro. Per scrivere più compendiosamente le 48 di destra è da osservare che ciascuna si compone di due sostituzioni: l'una che opera sopra i 4 raggi $abcd$, l'altra sopra i 4 raggi $a'b'c'd'$ (epperò tali due sostituzioni sono permutabili). Come nel quadro del n° 11, così adesso scriviamo queste due sostituzioni una di faccia all'altra dividendole nelle specie seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{identità} & \text{identità} \\ (ab)(cd) & (a'b')(c'd') \\ (ac)(bd) & (a'c')(b'd') \\ (ad)(bc) & (a'd')(b'c') \end{array} \right\} 1^a \text{ specie}$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} (bcd) & (b'd'c') \\ (adc) & (a'c'd') \\ (abd) & (a'd'b') \\ (acb) & (a'b'c') \end{array} \right\} 2^a \text{ specie}$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} (bcd) & (b'c'd') \\ (acd) & (a'd'c') \\ (adb) & (a'b'd') \\ (abc) & (a'c'b') \end{array} \right\} 3^a \text{ specie.}$$

Ebbene è facile riscontrare che per ottenere le 48 sostituzioni T'_b del n° precedente basta associare (come nel n° 11) una sostituzione di destra con una di sinistra, del quadro ora scritto, in tutti i modi possibili sottoponendo però tali due sostituzioni alla condizione di appartenere alla medesima specie. Ottenute poi le 48 T'_b basta moltiplicarle ciascuna per T_1 per ottenere le rimanenti T_b del n° precedente.

21. Ciò premesso dimostriamo intanto che le 48 T'_b formano gruppo. È da osservare perciò che il prodotto $T'_b \cdot T'_k$ di due tali sostituzioni può presentare i seguenti casi:

Se entrambe sono di 1^a specie il prodotto è di 1^a specie

» » » » 2^a » » » » 3^a »

» » » » 3^a » » » » 2^a ».

Se una è di 1^a specie e l'altra è di 2^a il prodotto è di 2^a

» » » » 2^a » » » » 3^a » » » 1^a

» » » » 3^a » » » » 1^a » » » 3^a.

Risulta così dimostrata l'esistenza del G_{48} formato con le T'_b .

Infine per dimostrare che tutte le 96 sostituzioni T_b e T'_b formano un gruppo G_{96} basta applicare al caso attuale le considerazioni del n° 12 sostituendo al G_{16} , ivi riguardato, il G_{48} ora accertato.

22. Le trasformazioni in parola vengono caratterizzate mediante le sostituzioni che esse operano sopra i simboli $abcd$, $a'b'c'd'$ ed è quindi ovvio ricavarne il periodo. Così dunque (prescindendo dalla identità) se ne hanno 27 involutorie, 32 a periodo 3 e 36 a periodo 4. Fra quelle involutorie ci sono 12 inversioni rispetto a coniche proprie, 6 inversioni rispetto a coppie di rette (analoghe alle T'_{16} , T'_{13} del n° 15): le rimanenti 9 hanno, ciascuna, 4 punti uniti.

Ripetendo poi il ragionamento del n° 14 si conclude che tutte le trasformazioni in parola sono quadratiche.

23. Circa alla rappresentazione analitica basta considerare che, per generare il G_{96} attuale, è sufficiente aggiungere al G_8 del caso generico le inversioni T_5 , T_6 ... T_{12} (n° 19). Prendiamo dunque a rappresentare una di esse: ad es. la

$$T_5 = (aa')(bc')(cd')(db').$$

Ora la relativa conica fondamentale passa, anzitutto, per F ed F' e quindi l'equazione è del tipo:

$$(10) \quad \chi^2 + hxy + kxz + lyz = 0.$$

Essa inoltre passa per i quattro punti:

$$aa' \equiv (\alpha^2, 1, \alpha); \quad bc' \equiv (\beta\gamma, 1, \beta); \quad cd' \equiv (\gamma\delta, 1, \gamma); \quad (db' \equiv (\beta\delta, 1, \delta).$$

Esigendo questi 4 passaggi si trovano le condizioni

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha + h\alpha + k\alpha^2 + l = 0 \\ \beta + h\gamma + k\beta\gamma + l = 0 \\ \gamma + h\delta + k\gamma\delta + l = 0 \\ \delta + h\beta + k\beta\delta + l = 0. \end{cases}$$

le quali coesistono perchè:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \beta & \gamma & \beta\gamma & 1 \\ \gamma & \delta & \gamma\delta & 1 \\ \delta & \beta & \beta\delta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

esprime la condizione, per ipotesi soddisfatta, affinchè le due quaterne $abcd$, $a'b'c'd'$ sieno equianarmoniche. Così l'equazione della conica fondamentale è precisata potendo calcolare h , k , l , da tre qualunque delle (11). Allora, tenendo presente che la conica d'inversione è la (10), che il centro d'inversione deve essere il polo (rispetto ad essa) di $z=0$, cioè il punto $(l, k, -h)$, si ottiene facilmente la seguente rappresentazione analitica di T_5 :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (\alpha + ly)(bx + lz) & (\alpha + kx)(by + kz) & - (hx + lz)(by + kz) \\ x & y & z \end{array} \right\}$$

e lo scopo è raggiunto.

24. Riassumendo i principali risultati conseguiti nel caso equianarmonico si ha il seguente enunciato:

« Se le due quaterne $abcd \overline{\wedge} a'b'c'd'$ sono equianarmoniche, esistono 95 trasformazioni quadratiche le quali, insieme all'identità, compongono un gruppo G_{96} , di ordine 96, rispetto a cui la configurazione è invariante. Dodici di queste trasformazioni sono inversioni di Hirst rispetto a coniche non degeneri, sei sono inversioni rispetto a coppie di rette, altre nove sono involutorie (a 4 punti uniti ciascuna). Delle rimanenti, 32 hanno il periodo 3 e 36 hanno il periodo 4.

Il sottogruppo più notevole di questo G_{96} è il G_{48} formato dalle trasformazioni che operano separatamente sopra $abcd$ e sopra $a'b'c'd'$: le 48 rimanenti invece scambiano fra loro i due gruppi suddetti $abcd$, $a'b'c'd'$ ».

Genova, Marzo 1917.

EDGARDO CIANI.

SULLA RISOLUZIONE APIRISTICA, IN UN CORPO QUADRATICO,
DELLA CONGRUENZA BINOMIA QUADRATICA E DI UNA
CLASSE DI CONGRUENZE BINOMIE IL CUI MODULO È
UN IDEALE PRIMO DI 2° GRADO.

Nota di **Vincenzo Amato** (Catania).

Adunanza del 22 aprile 1917.

In un precedente lavoro ¹⁾ abbiamo risoluto la questione di determinare, in un corpo quadratico $k(\sqrt{m})$, una soluzione apiristica della congruenza binomia

$$x^n \equiv a \pmod{P},$$

essendo P un ideale primo di 2° grado ²⁾ del corpo, cioè l'ideale determinato dai multipli, secondo interi del corpo, di un numero (intero razionale) primo dispari p . Mostriamo allora che la detta risoluzione può essere rimandata a quella di congruenze binomie, secondo il modulo p , nel corpo razionale, aventi per coefficienti numeri noti (e però indipendenti da a), le cui soluzioni debbono pertanto ritenersi note.

Nel caso particolare poi che n sia divisore di $p - 1$, mettemmo in rilievo che la risoluzione in discorso si può far dipendere dalla determinazione di un sistema completo di soluzioni della congruenza

$$x^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Se $n = 2$, questa ricerca si effettua immediatamente, e noi determinammo un sistema completo di 2° grado \pmod{P} che dà subito una soluzione apiristica della congruenza binomia quadratica.

La formola che si ottiene è però suscettibile di notevoli semplificazioni. È ciò che mostreremo in primo luogo nel presente lavoro. La formola finale è importante non

¹⁾ V. AMATO, *Sulla risoluzione apiristica, in un corpo quadratico, delle congruenze binomie secondo un ideale primo* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLII (1917) pp. 48-60].

²⁾ Quando il modulo è un ideale primo di primo grado, una soluzione apiristica della congruenza si ottiene subito dalla corrispondente soluzione, nel corpo razionale, della congruenza rispetto alla norma dell'ideale. Vedi V. AMATO, l. c. ¹⁾ p. 49.

solo per la sua eleganza, ma anche per le considerazioni a cui dà luogo relativamente alla risoluzione di una congruenza binomia di grado n , quando n è divisore di $p-1$. Tali considerazioni, come si vedrà nella seconda parte di questo lavoro, conducono rapidamente alla costruzione di notevoli soluzioni apiristiche della congruenza, le quali conservano tutta l'eleganza e l'utilità di quelle ottenute dal CIPOLLA ³⁾ nel corpo razionale.

I. Poniamo

$$\omega = \sqrt[m]{m},$$

ovvero

$$\omega = \frac{1 + \sqrt[m]{m}}{2},$$

secondo che sia

$$m \not\equiv 1 \pmod{4},$$

ovvero

$$m \equiv 1 \pmod{4}.$$

I numeri

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad 2, \quad \dots, \quad \frac{p-1}{2}, \\ \omega, \quad 2\omega, \quad \dots, \quad \frac{p-1}{2}\omega, \\ x + y\omega \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} x = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2} \\ y = 1, 2, \dots, p-1 \end{array} \right)$$

formano, qualunque sia p , un sistema completo di 2° grado (mod. P), cioè un sistema di $\frac{p^2-1}{2}$ numeri i cui quadrati sono incongrui fra loro (mod. P).

Data la congruenza quadratica

$$(2) \quad x^2 \equiv a \pmod{P},$$

essendo

$$(3) \quad a^{\frac{p^2-1}{2}} \equiv 1 \pmod{P},$$

se denotiamo in generale con

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{\frac{p^2-1}{2}}$$

un sistema completo di 2° grado (mod. P), il polinomio

$$(4) \quad x_0 \equiv A'_0 + A'_1 a + \dots + A'_{\frac{p^2-1}{2}-1} a^{\frac{p^2-1}{2}-1} = \sum_{k=0}^{\frac{p^2-1}{2}-1} A'_k a^k \pmod{P},$$

nel quale sia

$$(5) \quad A'_k \equiv -2(\rho_1^{2k-1} + \dots + \rho_{\frac{p^2-1}{2}}^{2k-1}) \pmod{P},$$

è una soluzione apiristica della (2).

³⁾ M. CIPOLLA, *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie secondo un modulo primo* [Mathematische Annalen, Bd. LXIII (1906). pp. 54-61].

2. Se si ha riguardo alla (3) e alla (5), si può scrivere la (4) sotto la forma seguente

$$(6) \quad x_0 \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p^2-1}{2}} A'_k a^k \pmod{P}.$$

Se il sistema completo di 2° grado (mod. P) è quello dei numeri (1), poichè è $k > 0$, si ha dalla (5)

$$A'_k \equiv -2 \left[p s_{2k-1} + \binom{2k-1}{1} s_{2k-2} \sigma_1 \omega + \dots \right. \\ \left. \dots + \binom{2k-1}{2k-2} s_1 \sigma_{2k-2} \omega^{2k-2} + \left(s_{2k-1} + \frac{p-1}{2} \sigma_{2k-1} \right) \omega^{2k-1} \right],$$

avendo posto

$$s_\mu = 1^\mu + 2^\mu + \dots + \left(\frac{p-1}{2} \right)^\mu, \quad \sigma_\gamma = 1^\gamma + 2^\gamma + \dots + (p-1)^\gamma.$$

E poichè σ_γ è congruo a -1 o a zero (mod. p) secondo che γ sia o no multiplo di p , posto

$$q = E \left(\frac{2k-1}{p-1} \right),$$

risulta

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} A'_k &\equiv 2 \left[\binom{2k-1}{p-1} s_{2k-p} \omega^{p-1} + \binom{2k-1}{2p-2} s_{2k-2p+1} \omega^{2(p-1)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \binom{2k-1}{q(p-1)} s_{2k-q(p-1)-1} \omega^{q(p-1)} - s_{2k-1} \omega^{2k-1} \right] \pmod{P}. \end{aligned} \right.$$

Denotando con r il resto (positivo) della divisione del numero intero positivo $2k-1$ per il numero pari $p-1$, si ha

$$2k-1 = q(p-1) + r,$$

nella quale eguaglianza, potendo k prendere tutti i valori non minori di 1 e non maggiori di $\frac{p^2-1}{2}$, sarà q non maggiore di p ed r dispari non maggiore di $p-2$.

Ma poichè ovviamente

$$s_{2k-1-\rho(p-1)} \equiv s_{2k-1} \equiv s_r \pmod{p}, \quad (\rho = 1, 2, \dots, q),$$

la (7) si riduce alla seguente

$$(8) \quad A'_k \equiv 2 s_r \sum_{\rho=1}^q \left(\frac{q(p-1)+r}{\rho(p-1)} \right) \omega^{\rho(p-1)} - 2 s_r (\omega^{p-1})^q \omega^r \pmod{P}.$$

3. Intanto, in base a note proprietà ⁴⁾ dei resti (mod. p) dei coefficienti binomiali, si hanno i risultati seguenti:

⁴⁾ Cfr., per es., E. LUCAS, *Théorie des nombres* (Paris, Gauthier-Villars, 1891), cap. XXIII.

1° Per tutti i valori di k pei quali sia

$$0 < q \leq r,$$

risulta, qualunque sia ρ variabile da 1 a q :

$$\binom{q(p-1)+r}{\rho(p-1)} \equiv 0 \pmod{p}.$$

2° Per tutti i valori di k pei quali sia

$$q > r,$$

risulta

$$\binom{q(p-1)+r}{\rho(p-1)} \equiv 0 \pmod{p},$$

se ρ è minore di $q-r$, e

$$\binom{q(p-1)+r}{\rho(p-1)} \equiv (-1)^{\rho-(q-r)} \binom{q-1}{\rho-1} \binom{\rho-1}{\rho-(q-r)} \pmod{p},$$

se ρ non è minore di $q-r$.

Ne segue che la (8) si può mettere sotto la forma seguente

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} A'_k &\equiv 2 s_r \sum_{\rho=q-r}^q (-1)^{\rho-(q-r)} \binom{q-1}{\rho-1} \times \\ &\times \binom{\rho-1}{\rho-(q-r)} \omega^{\rho(p-1)} - 2 s_r (\omega^{p-1})^q \omega^r \pmod{P}. \end{aligned} \right.$$

Posto

$$\omega^{p-1} = \Omega,$$

$$\rho = (q-r) + \lambda \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, r),$$

tenendo presente l'eguaglianza

$$\binom{q-1}{\rho-1} \binom{\rho-1}{\rho-(q-r)} = \binom{q-1}{r-\lambda} \binom{q-(r-\lambda)-1}{\lambda} = \binom{q-1}{r} \binom{r}{\lambda},$$

risulta dalla (9):

$$A'_k \equiv 2 s_r \binom{q-1}{r} \sum_{\lambda=0}^r (-1)^\lambda \binom{r}{\lambda} \Omega^{(q-r)+\lambda} - 2 s_r \Omega^q \omega^r \pmod{P},$$

donde, sostituendo all'esponente k di a^k il suo valore $\frac{p-1}{2}q + \frac{r+1}{2}$, si ha

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} A'_k a^k &\equiv \frac{2 s_r a^{\frac{r+1}{2}}}{\Omega^r} (a^{\frac{p-1}{2}} \Omega)^q \binom{q-1}{r} \sum_{\lambda=0}^r (-1)^\lambda \binom{r}{\lambda} \Omega^\lambda - \\ &- 2 s_r a^{\frac{r+1}{2}} (\Omega a^{\frac{p-1}{2}})^q \omega^r \pmod{P}. \end{aligned} \right.$$

4. Se

$$\omega = \sqrt{m},$$

allora m è notoriamente ⁵⁾ non residuo quadratico di p , quindi

$$\Omega = \omega^{p-1} = m^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p},$$

⁵⁾ J. SOMMER, *Introduction à la théorie des nombres algébriques*. Édition française. Traduit par A. LÉVY (Paris, Hermann, 1911), p. 65.

e posto

$$\alpha = a^{\frac{p-1}{2}},$$

la (10) diviene

$$(11) \quad A'_k a^k \equiv -2 s_r a^{\frac{r+1}{2}} (-\alpha)^q \binom{q-1}{r} \sum_{\lambda=0}^r \binom{r}{\lambda} - 2 s_r a^{\frac{r+1}{2}} (-\alpha)^q \omega^r \pmod{P},$$

e la formola (6), quando si ponga $r = 2h + 1$, diventa, se si tien presente la (11):

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} x_o &\equiv -2 \sum_{h=0}^{\frac{p-3}{2}} 2^{2h+1} s_{2h+1} a^{h+1} \sum_{q=2(h+1)}^p (-\alpha)^q \binom{q-1}{2h+1} \\ &\quad - 2 \sum_{h=0}^{\frac{p-3}{2}} s_{2h+1} a^{h+1} \omega^{2h+1} \sum_{q=0}^p (-\alpha)^q \end{aligned} \right\} \pmod{P}.$$

5. Se

$$\alpha = a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{P},$$

la (12) si semplifica notevolmente, perchè essendo

$$\sum_{q=2(h+1)}^p \binom{q-1}{2h+1} \equiv 0 \pmod{p}, \quad \sum_{q=0}^p (-\alpha)^q \equiv 1 \pmod{P},$$

si ha

$$x_o \equiv -\frac{2}{\sqrt{m}} \left[s_1(ma) + s_3(ma)^2 + \dots + s_{\frac{p-3}{2}}(ma)^{\frac{p-3}{2}} + s_{-1} \right] \pmod{P}.$$

Se invece

$$\alpha = a^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv -1 \pmod{P},$$

si ha

$$\sum_{q=0}^p (-\alpha)^q = \frac{\alpha^{p+1} - 1}{-\alpha - 1} = \frac{a^{\frac{p^2-1}{2}} - 1}{-\alpha - 1} \equiv 0 \pmod{P},$$

e la (12) diventa

$$x_o \equiv -2 \sum_{h=0}^{\frac{p-3}{2}} 2^{2h+1} s_{2h+1} a^{h+1} \alpha^{2(h+1)} \sum_{q=2(h+1)}^p (-\alpha)^{q-2(h+1)} \binom{q-1}{2h+1} \pmod{P}.$$

Ma se si pone

$$c_t = 1 - \binom{t+1}{1} \alpha + \binom{t+2}{2} \alpha^2 - \dots + (-1)^{p-(t+1)} \binom{p-1}{p-(t+1)} \alpha^{p-(t+1)},$$

si ha, se $t > 0$:

$$c_t \equiv 1 - \binom{t+1}{1} \alpha + \binom{t+2}{2} \alpha^2 - \dots$$

$$\dots + (-1)^{p-(t+1)} \binom{p-1}{p-(t+1)} \alpha^{p-(t+1)} + (-1)^{p-t} \binom{p}{p-t} \alpha^{p-t} \pmod{P},$$

e si ricava

$$c_t - c_{t-1} \equiv -\alpha c_t \pmod{P},$$

dalla quale si ottiene

$$c_i \equiv \frac{1 + \alpha^p}{(1 + \alpha)^{i+1}} \equiv \frac{1 + \frac{1}{\alpha}}{(1 + \alpha)^{i+1}} = \frac{1}{\alpha(1 + \alpha)^i} \pmod{P},$$

e perciò

$$\sum_{q=2(h+1)}^p (-\alpha)^{q-2(h+1)} \binom{q-1}{2h+1} = c_{2h+1} \equiv \frac{1}{\alpha(1 + \alpha)^{2h-1}} \pmod{P},$$

donde

$$x_0 \equiv -2 \sum_{h=0}^{\frac{p-3}{2}} 2^{2h+1} s_{2h+1} \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^{2h+1} a^{h+1} \pmod{P}.$$

Riassumendo quanto è stato ottenuto in questo e nel numero precedente, si ha:

Nel corpo quadratico $k(\sqrt{m})$, se

$$m \not\equiv 1 \pmod{4},$$

e

$$-a^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1 \pmod{P},$$

la congruenza quadratica (2) ammette la soluzione apiristica

$$x_0 \equiv -2 \sum_{h=0}^{\frac{p-3}{2}} \left(\frac{2\alpha}{1 + \alpha} \right)^{2h+1} s_{2h+1} a^{h+1} \pmod{P},$$

che si può anche mettere sotto la forma

$$(13) \quad x_0 \equiv -\frac{2}{A} [s_{-1} + s_1(A^2 a) + s_3(A^2 a)^2 + \dots + s_{\frac{p-3}{2}}(A^2 a)^{\frac{p-3}{2}}] \pmod{P},$$

essendo

$$A = \frac{2\alpha}{1 + \alpha} = \frac{2a^{\frac{p-1}{2}}}{1 + a^{\frac{p-1}{2}}}$$

ed

$$s_{2h+1} = 1^{2h+1} + 2^{2h+1} + \dots + \left(\frac{p-1}{2} \right)^{2h+1}.$$

La (13) ci dà, come caso particolare, se a soddisfa alla condizione

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{P},$$

la formola già nota ⁶⁾ nel corpo razionale.

Se invece, fatta sempre la stessa ipotesi su m , è

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{P},$$

⁶⁾ M. CIPOLLA, l. c. 3), p. 57

la (2) ammette la soluzione apiristica

$$(14) \quad -\frac{2}{\sqrt{m}} [s_{-1} + s_1(ma) + s_3(ma)^2 + \dots + s_{p-4}(ma)^{\frac{p-3}{2}}].$$

6. Resta a considerare il caso che sia

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{m}}{2}.$$

Allora posto

$$\alpha = a^{\frac{p-1}{2}}, \quad \beta = \alpha \Omega = a^{\frac{p-1}{2}} \omega^{p-1},$$

la (10) dà:

$$A'_k a^k \equiv \frac{2 s_r a^{\frac{r+1}{2}}}{\Omega^r} \beta^q \left(\begin{matrix} q-1 \\ r \end{matrix} \right) \sum_{\lambda=0}^r (-1)^\lambda \left(\begin{matrix} r \\ \lambda \end{matrix} \right) \Omega^\lambda - 2 s_r a^{\frac{r+1}{2}} \omega^r \beta^q \pmod{P},$$

e perciò, se si ha riguardo alla (6), posto $r = 2h + 1$, si ottiene

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} x_0 &\equiv 2 \sum_{h=0}^{\frac{p-3}{2}} \frac{s_{2h+1} a^{h+1}}{\Omega^{2h+1}} \sum_{q=2(h+1)}^p \beta^q \left(\begin{matrix} q-1 \\ 2h+1 \end{matrix} \right) \sum_{\lambda=0}^{2h+1} (-1)^\lambda \left(\begin{matrix} 2h+1 \\ \lambda \end{matrix} \right) \Omega^\lambda - \\ &\quad - 2 \sum_{h=0}^{\frac{p-3}{2}} s_{2h+1} a^{h+1} \omega^{2h+1} \sum_{q=0}^p \beta^q \pmod{P}. \end{aligned} \right.$$

Nel caso in cui sia

$$\beta \equiv 1 \pmod{P},$$

cioè

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \omega^{-(p-1)} \equiv \frac{\omega}{1-\omega} \pmod{P},$$

si ha, come abbiamo visto al n° 5:

$$\sum_{q=2(h+1)}^p \left(\begin{matrix} q-1 \\ 2h+1 \end{matrix} \right) \equiv 0 \pmod{p},$$

e perciò la (15) diventa

$$x_0 \equiv -\frac{2}{\omega} [s_{-1} + s_1(\omega^2 a) + s_3(\omega^2 a)^2 + \dots + s_{p-4}(\omega^2 a)^{\frac{p-3}{2}}] \pmod{P}.$$

Se invece

$$\beta \not\equiv 1 \pmod{P},$$

poichè allora è

$$\sum_{q=0}^p \beta^q \equiv 0 \pmod{P},$$

la (15) diventa

$$x_0 \equiv 2 \sum_{h=0}^{\frac{p-3}{2}} \frac{s_{2h+1} a^{h+1}}{\Omega^{2h+1}} (1 - \Omega)^{2h+1} \sum_{q=2(h+1)}^p \left(\begin{matrix} q-1 \\ 2h+1 \end{matrix} \right) \beta^q \pmod{P},$$

e si deduce col procedimento indicato al n° 5:

$$x_0 \equiv -2 \sum_{h=0}^{\frac{p-3}{2}} \left(\frac{\beta(1-\Omega)}{\Omega(1-\beta)} \right)^{2h+1} s_{2h+1} a^{h+1} \pmod{P}.$$

Concludendo:

Nel corpo quadratico $k(\sqrt{m})$, se

$$m \equiv 1 \pmod{4},$$

e

$$\beta \not\equiv 1 \pmod{P},$$

la congruenza quadratica (2) ammette la soluzione apiristica

$$x_0 \equiv -2 \sum_{h=0}^{\frac{p-3}{2}} \left(\frac{\alpha(1-\Omega)}{1-\beta} \right)^{2h+1} s_{2h+1} a^{h+1} \pmod{P},$$

che si può anche mettere sotto la seguente forma

$$(16) \quad x_0 \equiv -\frac{2}{B} [s_{-1} + s_1(B^2 a) + s_3(B^2 a)^2 + \cdots + s_{\frac{p-3}{2}}(B^2 a)^{\frac{p-3}{2}}] \pmod{P},$$

essendo

$$B = \alpha \frac{1-\Omega}{1-\beta} = a^{\frac{p-1}{2}} \frac{1-\omega^{p-1}}{1-a^{\frac{p-1}{2}} \omega^{p-1}}.$$

La (16) ci dà, come caso particolare, se a soddisfa alla condizione

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{P},$$

la formola già nota nel corpo razionale.

Se invece, fatta la stessa ipotesi su m , è

$$\beta = \omega^{p-1} a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{P},$$

la (2) ammette la soluzione apiristica

$$(17) \quad x_0 \equiv -\frac{2}{\omega} [s_{-1} + s_1(\omega^2 a) + s_3(\omega^2 a)^2 + \cdots + s_{\frac{p-3}{2}}(\omega^2 a)^{\frac{p-3}{2}}] \pmod{P}.$$

7. Le soluzioni (13), (14), (16) e (17) hanno la stessa forma

$$(18) \quad x_0 \equiv -\frac{2}{C} [s_{-1} + s_1(C^2 a) + s_3(C^2 a)^2 + \cdots + s_{\frac{p-3}{2}}(C^2 a)^{\frac{p-3}{2}}] \pmod{P},$$

essendo

$$(19) \quad C \equiv \begin{cases} \frac{2a^{\frac{p-1}{2}}}{1+a^{\frac{p-1}{2}}} & \pmod{P} \text{ se } m \not\equiv 1 \pmod{4} \text{ e } -a^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1 \pmod{P} \\ \sqrt{m} & \text{» » » » » } -a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ »} \\ a^{\frac{p-1}{2}} \frac{1-\omega^{p-1}}{1-a^{\frac{p-1}{2}} \omega^{p-1}} & \text{» » } m \equiv 1 \text{ » » } a^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv \frac{1}{\omega^{p-1}} \text{ »} \\ \omega = \frac{1+\sqrt{m}}{2} & \text{» » » » » } a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \frac{1}{\omega^{p-1}} \text{ »} \end{cases}$$

Per il calcolo dei resti (mod. p) dei coefficienti della (18) conviene esprimere s_r pei numeri B_r di BERNOULLI, che, come è noto ⁷⁾, sono definiti dall'eguaglianza simbolica

$$(B + 1)^r - B^r = r.$$

Allora si ha

$$s_r \equiv \frac{\left(B - \frac{1}{2}\right)^{r+1} - B^{r+1}}{r + 1} \pmod{p},$$

e la (18) si può mettere sotto la forma

$$(20) \quad x_0 \equiv \frac{4}{C} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right) \frac{B_{2k}}{2^k} (C^2 a)^k \pmod{P}.$$

Se poi s'introducono i numeri G_r di GENOCCHI ⁸⁾:

$$G_r = 2(1 - 2^r)B_r,$$

la (20) diviene

$$x_0 \equiv -\frac{1}{C} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{G_{2k} C^{2k} a^k}{2^{2k} \cdot k} \pmod{P},$$

e poichè per r dispari e maggiore di 1 è $G_r = 0$ e $G_1 = -1$, il precedente risultato può mettersi sotto la forma

$$x_0 \equiv -\sqrt{a} - \frac{2}{C} \sum_{r=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{r} G_r \left(\frac{C\sqrt{a}}{2}\right)^r \pmod{P},$$

(dove l'irrazionalità è soltanto apparente), si conclude che:

Lo sviluppo simbolico secondo le potenze di \sqrt{a} di

$$\sqrt{a} - \frac{2}{C} \log \left(1 - \frac{C}{2} G\sqrt{a}\right),$$

arrestato alla potenza di esponente $p-1$, è una soluzione apiristica della congruenza

$$x^2 \equiv a \pmod{P}.$$

Nella (20) si possono anche introdurre i numeri E di EULERO pei quali, com'è noto, si ha simbolicamente ⁹⁾

$$\frac{(E + 1)^{r-1}}{2^r} = \frac{(2^r - 1)B_r}{r},$$

e si ottiene

$$x_0 \equiv \sqrt{a} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{(E + 1)C\sqrt{a}}{4} \right]^{2k-1} \pmod{P}.$$

⁷⁾ Cfr. per es. E. CESÀRO, *Corso di analisi algebrica con introduzione al calcolo infinitesimale* (Torino, Bocca, 1894), p. 280.

⁸⁾ E. LUCAS, op. cit. 4), p. 251.

⁹⁾ E. CESÀRO, op. cit. 7), p. 284.

Notando poi che per r pari è

$$(E + 1)^r = 0,$$

si deduce che:

Lo sviluppo simbolico secondo le potenze di \sqrt{a} dell'espressione

$$\frac{\sqrt{a}}{1 - \frac{E + 1}{4} C \sqrt{a}} = \sqrt{a},$$

arrestato alla potenza di esponente $p - 2$, è una soluzione apiristica della congruenza

$$x^2 \equiv a \pmod{P}.$$

8. Ritorniamo a considerare la soluzione apiristica (18) della congruenza binomia quadratica (2), nella quale C ha uno dei quattro valori (19). In particolare, se

$$(21) \quad a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{P},$$

risulta $C \equiv 1 \pmod{P}$, e l'espressione (18) per x_0 diviene identica a quella nota nel corpo razionale. La ragione di ciò sta nel fatto che tutti i numeri a soluzioni della (21) sono i $\frac{p-1}{2}$ residui quadratici di p , e per conseguenza a è congruo (mod. P) ad un numero razionale.

Nel caso generale la (18) non differisce dalla detta soluzione nel corpo razionale che per il cambiamento di a in $C^2 a$ e per il divisore C , cosicchè $C x_0$ è una soluzione della congruenza

$$(22) \quad y^2 \equiv C^2 a \pmod{P},$$

e subito si verifica che qualunque sia il valore C dato dalle (19) si ha

$$(23) \quad (C^2 a)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{P}.$$

Il fattore C^2 ha dunque l'effetto di rendere il prodotto $C^2 a$ congruo (mod. P) ad un numero razionale intero. Ma in questo caso le soluzioni della (22) sono esse stesse congrue (mod. P) a numeri razionali interi, e si ha il risultato notevole seguente:

1° Se C è una soluzione qualunque della congruenza (23), per ottenere una soluzione apiristica della congruenza

$$x^2 \equiv a \pmod{P},$$

basta dividere per C una qualsivoglia soluzione apiristica nel corpo razionale della congruenza binomia quadratica (22) dove a P sia sostituito p .

Il metodo seguito nella prima parte di questo lavoro ci ha condotto ad alcune soluzioni C della (23). Sulla scorta di queste è ora facile costruirne altre anche di forma più semplice.

Si perviene ad es. al risultato seguente che si stabilisce subito con semplice verifica:

2° Se $a^{\frac{p-1}{2}}$ non è congruo a $-1 \pmod{P}$, una soluzione della (23) è data dalla formola

$$C \equiv 1 + a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{P},$$

e se a non soddisfa alla (21), dalla formola

$$C \equiv \sqrt{m} (1 - a^{\frac{p-1}{2}}) \pmod{P}.$$

Data poi una soluzione C_0 della (23), tutte le $p-1$ soluzioni della stessa si ottengono moltiplicando C_0 pei numeri di un sistema completo di resti non congrui a zero, secondo il mod. p .

9. Quando si tenta di estendere la proposizione 1ª del n° 8 al caso di una congruenza binomia di grado n

$$(24) \quad x^n \equiv a \pmod{P},$$

essendo sempre P un ideale primo di 2° grado del corpo, di norma p^2 , ed n divisore di $p^2 - 1$, si presenta necessaria la condizione che n divida $p - 1$.

In tal caso, se è soddisfatta la condizione

$$(25) \quad a^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{P}$$

deve essere a congruo ad un intero razionale e la (24), come nel corpo razionale, ammette la soluzione apiristica

$$A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \dots + A_{\frac{p-1}{n}-1} a^{\frac{p-1}{n}-1},$$

essendo

$$A_k \equiv -n(r_1^{nk-1} + r_2^{nk-1} + \dots + r_{\frac{p-1}{n}}^{nk-1}) \pmod{p},$$

coi numeri

$$r_1, r_2, \dots, r_{\frac{p-1}{n}}$$

formanti un sistema completo di n^{mo} grado \pmod{p} .

Se invece non è soddisfatta la (25), si può determinare C , come mostreremo tosto, in maniera che sia soddisfatta la congruenza

$$(26) \quad (C^n a)^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{P},$$

e allora $C^n a$ è congruo \pmod{P} ad un intero razionale, e la (24) ammette la soluzione apiristica

$$\frac{1}{C} [A_0 + A_1 (C^n a) + A_2 (C^n a)^2 + \dots + A_{\frac{p-1}{n}-1} (C^n a)^{\frac{p-1}{n}-1}].$$

Si stabiliscono così, come nel n° precedente, le due proposizioni:

1° Se $a^{\frac{p-1}{n}}$ non è congruo a $-1 \pmod{P}$, una soluzione della (26) è data dalla

formola

$$C \equiv 1 + a^{\frac{p-1}{n}} \pmod{P}.$$

E se a non soddisfa alla (25), una soluzione della (26) è data dalla formola

$$C \equiv \sqrt[n]{m} (1 - a^{\frac{p-1}{n}}) \pmod{P}.$$

Tutte le $p-1$ soluzioni della (26) si ottengono poi da una qualsivoglia soluzione particolare C_0 , moltiplicandola pei numeri d'un sistema completo di resti incongrui a zero (mod. p).

2° Se C è una soluzione qualunque della congruenza (26), per ottenere una soluzione apiristica della congruenza binomia (24) il cui grado n è divisore di $p-1$, basta dividere per C una qualsivoglia soluzione apiristica, nel corpo razionale, della congruenza

$$y^n \equiv a C^n \pmod{P}.$$

10. I risultati ottenuti nei n° 8 e 9 ci permettono di estendere senz'altro ad un corpo quadratico i procedimenti indicati dal CIPOLLA ¹⁰⁾ nel corpo razionale per ottenere delle soluzioni apiristiche della congruenza binomia di grado n (se n è divisore di $p-1$), e sotto forme che, per la loro semplicità, riescono più adatte dal punto di vista del calcolo delle radici. Si hanno infatti i seguenti teoremi:

1° Se n è primo con $\frac{p-1}{n}$, se C una soluzione della (26) e λ una soluzione della congruenza

$$nx \equiv 1 \pmod{\frac{p-1}{n}},$$

il numero

$$C^{n\lambda-1} a^\lambda$$

è una soluzione apiristica della (24).

2° Se g è una radice primitiva di p , e C una soluzione della (26), allora una soluzione apiristica della (24) è

$$\frac{n}{C} (g^{\frac{p-1}{n}} - 1) \sum_{s=0}^{\frac{p-1}{n}-1} \frac{(C^n a)^s}{g^{ns-1} - 1}.$$

Poichè per $n=2$, si ha

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p},$$

ne discende subito il seguente teorema:

3° Se g è una radice primitiva di p , e C è una soluzione della (26), una soluzione apiristica della congruenza binomia quadratica

$$x^2 \equiv a \pmod{P}$$

¹⁰⁾ Cfr. M. CIPOLLA, l. c. ³⁾, pp. 57, 58 e 59.

è

$$\frac{4}{C} \sum_{s=0}^{\frac{p-1}{2}-1} \frac{(C^2 a)^s}{g^{2s-1} - 1}.$$

4° Decomposto $p-1$ in due fattori primi tra loro q e $\frac{p-1}{q}$, il primo dei quali sia multiplo di n , se γ è un numero appartenente all'esponente $q \pmod{p}$, e se μ è una soluzione della congruenza

$$n x \equiv 1 \pmod{\frac{p-1}{q}},$$

una soluzione apiristica della (24) è

$$-\frac{n}{qC} (C^n a)^\mu (\gamma^{\frac{q}{n}} - 1) \sum_{s=0}^{\frac{q}{n}-1} \frac{(C^n a)^s \frac{p-1}{q}}{\gamma^{(\mu+s\frac{p-1}{q})n-1} - 1}.$$

5° Se si pone

$$\mu n - 1 = \nu \frac{p-1}{q},$$

ferme restando le ipotesi dell'ultima proposizione, alla soluzione apiristica indicata in questa proposizione si può sostituire l'altra

$$\frac{n}{qC} (C^n a)^\mu (\gamma^{\frac{q}{n}} - 1) \sum_{s=0}^{\frac{q}{n}-1} \frac{(C^n a)^s \frac{p-1}{q}}{\gamma^{\nu+s\nu} - 1}.$$

Per applicare le due formole non occorre che la conoscenza di γ . Nel caso in cui sia $n=2$, se 2^r è la massima potenza di 2 che entra in $p-1$, si può assumere

$$\gamma \equiv m^{\frac{p-1}{2^r}} \pmod{p},$$

perchè il numero m che definisce il corpo quadratico è un non residuo quadratico di p , secondo le ipotesi fatte sull'ideale primo P . Si può assumere allora

$$q = 2^r, \quad \mu = \frac{p+2^r-1}{2^{r+1}}, \quad \nu = 1,$$

e si deduce che

$$\frac{1}{2^{r-2}C} (C^2 a)^{\frac{p+2^r-1}{2^{r+1}}} \sum_{s=0}^{2^r-1-1} \frac{(C^2 a)^s \frac{p-1}{2^r}}{m^{(2s+1)\frac{p-1}{2^r}} - 1}$$

è una soluzione apiristica della (2)

Catania, 6 aprile 1917.

VINCENZO AMATO.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO

FONDATORE: G. B. GUCCIA.

INDICI DEL TOMO XLII (1917).

INDICE DELLE MATERIE

MEMORIE E COMUNICAZIONI.

Amaldi, U. (Modena).

Sulle derivate successive delle funzioni composte di quante si vogliano variabili . . . 94-115

Amato, V. (Catania).

Sulla risoluzione apiristica, in un corpo quadratico, delle congruenze binomie secondo un ideale primo . . . 48-60

Sulla risoluzione apiristica, in un corpo quadratico, della congruenza binomia quadratica e di una classe di congruenze binomie il cui modulo è un ideale primo di 2° grado. 339-351

Brusotti, L. (Pavia).

Curve generatrici e curve aggregate nella costruzione di curve piane d'ordine assegnato dotate del massimo numero di circuiti . . . 138-144

Ciani, E. (Genova).

Sopra alcuni gruppi notevoli di trasformazioni quadratiche piane. . . 323-338

Coolidge, J. L. (Cambridge, Mass.).

The characteristic numbers of a real algebraic plane curve. . . 260-266

Eisenhart, L. P. (Princeton, N. J.).

Certain surfaces of Voss and surfaces associated with them . . . 145-166

Grimaldi, G. (Catania).

Delle superficie algebriche d'ordine 7 con un fascio ellittico di coniche . . . 80-84

Levi-Civita, T. (Padova).

Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana . . . 173-205

- Lusin, N.** (Moscou) et **Sierpiński, W.** (Léopol).
Démonstration élémentaire du théorème fondamental sur la densité des ensembles . . . 167-172
- Marletta, G.** (Catania).
Delle superficie algebriche d'ordine 6 con un fascio di cubiche ellittiche . . . 116-124
- Nalli, P.** (Palermo).
Sulla sommabilità delle serie con particolare riguardo alle serie di DIRICHLET . . . 61-72
Sopra una relazione fra la teoria della composizione di prima specie e lo studio delle serie divergenti . . . 206-226
- Nicoletti, O.** (Pisa).
Su una classe di algoritmi di iterazione per l'approssimazione degli irrazionali quadratici. 73-79
- Prasad, G.** (Calcutta).
On the Newtonian potential due to a surface distribution having a discontinuity of the second kind . . . 125-127
- Sannia, G.** (Cagliari).
Nuovo metodo di sommazione delle serie: estensione del metodo di BOREL . . . 303-322
- Segre, C.** (Torino).
Su una generazione dei complessi quadratici di rette del BATTAGLINI . . . 85-93
- Severi, F.** (Padova).
Sulla curvatura delle superficie e varietà . . . 227-259
- Strazzeri, V.** (Palermo).
Sulle superficie che ammettono per sezioni piane una semplice infinità di curve prefissate. . . 1-47
- Valiron, G.** (Lyon).
Remarques sur la sommation des séries divergentes par les méthodes de M. BOREL. . . 267-284
- Vergerio, A.** (Cagliari).
Sulle equazioni integrali di prima specie a nucleo non simmetrico . . . 285-302
- Wilczynski, E. J.** (Chicago, Ill.).
Integral invariants in projective Geometry . . . 128-137

INDICE ALFABETICO DEI NOMI

- AMALDI (U.) 94-115.
 AMATO 48-60, 339-351.
 ASCHIERI 85, 86, 88.
- BACHMANN 48, 50.
 BÄCKLUND 146, 147, 153.
 BAGNERA 35.
 BATTAGLINI 85, 86, 87, 88, 89, 92, 93.
 BIANCHI 3, 5, 12, 22, 25, 35, 36, 145, 146, 159, 173, 176, 187, 201, 231, 232, 251, 252, 254, 255.
 BONOLA 246.
 BOREL 61, 206, 217, 218, 267, 268, 303, 304, 305, 309, 316, 317, 321, 322.
 BROMWICH 303, 307, 308.
 BRUSOTTI 138-144.
- CASTELNUOVO 80, 81, 120.
 CAUCHY 318.
 CESÀRO 3, 5, 14, 25, 31, 32, 33, 35, 38, 62, 95, 114, 137, 223, 304, 305, 347.
 CHASLES 8.
 CHISINI 95.
 CHRISTOFFEL 174, 179, 181, 190, 196, 238, 254.
 CIANI 323-338.
 CIPOLLA 50, 51, 340, 344, 350.
 CLIFFORD 186, 187, 188, 205.
 CODAZZI 5, 7, 9, 11, 19, 20, 158.
 COOLIDGE 260-266.
- DARBOUX 11, 25, 35, 36, 160, 175, 188, 191, 229, 238, 240.
- DEDEKIND 71, 79.
 DE FRANCHIS 80.
 DIRICHLET 48, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 71, 223.
 DUPIN 38, 47.
- EINSTEIN 173.
 EISENHART 145-166.
 EISLAND 175.
 ENRIQUES 80, 95.
 EUCLIDE 175.
- FAIFOER 48.
 FAIS 95, 114.
 FISCHER 300.
 FORSYTH 131.
- GAUSS 5, 7, 9, 11, 20, 50, 76, 201, 229, 251.
 GENOCCHI 347.
 GRIMALDI (sig.^{na} G.) 80-84.
 GUICHARD 146, 156, 164, 165, 166.
- HADAMARD 194.
 HARDY 267, 268, 271, 273, 275, 276, 277, 303, 304, 308, 312.
 HARNACK 138, 139.
 HILBERT 48, 138, 139.
 HIRST 323, 324, 334, 338.
 HOPPE 94, 95.
 HOSPITAL (L') 42, 224, 310.
 HUMBERT 246.
- JACOB 79.
 JESSOP 86.
 JOACHMISTAL 34, 35, 47.
- JUEL 262.
- KLEIN 261, 262, 264, 266.
- LAGRANGE 186.
 LAGUERRE 131.
 LAMBERT 229, 230, 246, 247, 248, 251.
 LANCIA 50.
 LANDAU 267.
 LAURA 175.
 LAURENT 282.
 LAURICELLA 285.
 LEBESGUE (H.) 167.
 LEGENDRE 49.
 LEVI-CIVITA 171-205, 227, 229, 230, 243, 244, 245, 246, 248, 251, 252, 254, 256, 258, 259.
 LÉVY 48.
 LIE 128.
 LINDELOF 267.
 LITTLEWOOD 267, 268, 271, 273, 275, 276, 277.
 LUCAS 341, 347.
 LUSIN 167-172.
- MAC-LAURIN 313.
 MARLETTA 80, 81, 83, 84, 116-124.
 MEDOLAGHI 94.
 MEYER (Fr.) 262.
 MITTAG-LEFFLER 267, 272.
 MOSSA 95, 114.
 MOUTARD 145.
- NALLI 61-72, 206-226.
 NEWTON 71, 79, 125, 173.

NICOLETTI 71-79.	198, 202, 203, 204, 205, 227, 228, 230, 246, 248, 249, 251, 252, 253, 259.	STRAZZERI 1-47.
PASCAL (E.) 94.		STURM (R.) 85.
PICARD 94.	RIESZ (M.) 61, 62, 68, 223.	TAUBER 268.
PLÜCKER 260, 261, 262, 263, 266.	SACCHERI 229, 246, 248.	TAYLOR 203, 268.
POINCARÉ 128.	SANNIA 303-322.	VALIRON 267-284.
PRASAD 125-127.	SCHMIDT 285.	VERGERIO 285-302.
PUCCIANO 125.	SCHUH 261.	VERONESE 83, 84.
	SCHUR 85.	VESSIOT 175.
RAGSDALE 139.	SCHWARZ 298.	VOLTERRA 206, 209, 217, 222.
RIBAUCOUR 146, 159, 160.	SCORZA 81, 82, 83, 120.	VOSS 145, 146, 156, 158, 159, 162, 163, 164.
RICCATTI 12, 13, 36, 154, 166, 175.	SEGRE 85-93.	WEBER (H.) 174, 196, 202, 203, 252.
RICCI 173, 180, 192, 195, 196, 205.	SEVERI 227-259.	WEYL 300.
RIEMANN 173, 174, 180, 196,	SIERPINSKI 167-172.	WILCZYNSKI 128-137.
	SOMMER 48, 342.	
	STOLZ 95.	

FINE DEL TOMO XLII (1917).

Math. *univ.* UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY
CI ✓
V. 42
RENDICONTI JUL 10 1920

*Complete with
H. P. B. index*
DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

FONDATORE: G. B. GUCCIA

DIRETTORE FF.: M. DE FRANCHIS.

TOMO XLII



PALERMO,
SEDE DELLA SOCIETÀ

30, VIA RUGGIERO SETTIMO, 30.

—
1917

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO

Fondatore: G. B. GUCCIA.

Direttore ff.: M. De Franchis.

Tomi I-XLII [1887-1917]: XIV + 16806 pagine; 1061 Memorie e Note; 364 Autori:

Abraham, Adh  mar (d'), Aguglia, Alagna, Albergiani, Allen (E.S.), Allen (F.E.), Almansi, Amaldi, Amato, Amici, Amoroso, Andreoli, Appell, Ascione, Autonne, Bagnera, Barbieri (A.), Barbieri (U.), Bassel, Bauer (G.N.), Bellesini, Beltrami, Berry, Bertini, Berzolari, Bettazzi, Betti, Bianchi, Bieberbach, Birkhoff, Blaschke, Boggio, Bohr, Bolza, Bompiani, Bonola, Borel, Bortolotti (Em.), Bortolotti (Et.), Bottasso, Bourlet, Boutroux, Brambilla, Braude, Brill (von), Brioschi, Broggi, Brusotti, Bucca (F.), Bucca (R.), Burali-Forti, Burgatti, Calapso, Caldarera (F.), Caldarera (G.M.), Cantelli, Cantone, Cantor (G.), Capelli, Carath  odory, Carrone, Casorati, Castelnuovo, Catalan, Cavallaro, Cecioni, Cerruti, Certo, Ces  ro, Chillemi, Chini, Chisini, Chittenden, Ciani, Cipolla, Cisotti, Colonnetti, Coolidge, Comessatti, Conti (I.), Cordone, Cremona, Dall'Acqua, Daniele, Da Rios, David, De Donder, De Franchis, Del Pezzo, Del Re, Dickson, Dini, Di Pirro, D'Ovidio, Dulac, Dyck (von), Eiesland, Eisenhart, Emch, Enriques, Errera, Evans, Fano, Fej  r, Fekete, Ferretti, Fichtenholz, Fischer, Forsyth, Fouret, Fr  chet, Fredholm, Fubini, Fueter, Galvani, Gambera, Garibaldi, Gebbia, Gegenbauer, Gerbaldi, Giambelli, Gigli, Giorgi, Giraud, Giudice, Giuliani, Giulotto, Glaue, Godeaux, Gordan, Grimaldi, Grossi, Gronwall, Groussin  ff, Guccia, Guldberg, Haar, Hadamard, Hahn, Halphen, Hanna, Hardy, Hassler, Hawkesworth, Hayashi, Hermite, Hilbert, Hirst, Hudson, Humbert, Insolera, Jackson (D.), Jackson (F.H.), Jahnke, Jonqu  res (de), Jordan, Jung (G.), Jung (H.W.E.), Kantor, Kasner, Kerbedz, Keyser, Klein, Kneser, Knopp, Koch (von), K  nig (D.), K  nigs, K  nigsberger, Kohn, Kolosoff, Korn, Korteweg, Laisant, Landau, Lauricella, Lazzeri, Lebesgue, Lebon, Lecat, Lefschetz, Levi (B.), Levi (E.E.), Levi (F.), Levi-Civita, L  vy, Lichtenstein, Liebmann, Lindel  f (E.), Lindqvist, Littlewood, Lo Monaco-Aprile, Loria, Lovett, Ludwig, L  roth, Lusin, Maccaferri, Maisano, Mannheim, Marcolongo, Marletta, Maroni, Martinetti, Martinotti, Mattson, Medici, Medolaghi, Metzler, Mineo, Mittag-Leffler, Mohrman, Mollerup, Montesano, Montessus (de), Moore (E.H.), Morale, Morera, Moulton, Murer, Nalli, Nelson, Neumann (E.R.), Nicoletti, Nielsen, Nobile, N  rlund, Noether (M.), Occhipinti, Orlando, Oseen, Osgood, Paci, Pal, Palatini (A.), Palomby, Pannelli, Pascal, Patern   (F.P.), Peano, Pennacchietti, Pensa, Pepoli, P  r  s, Perna, Perron, Petrovitch (M.), Pexider, Phragm  n, Picard, Pick, Picone, Pieri, Pincherle, Pisati, Pizzetti, Plancherel, Poincar  , P  lya, Pompei, Popovici, Porro, Prasad, Priwaloff, Puciano, Puglisi, Quanjel, Quintili, Rabinovitch, Rados, Remak, R  mou  dos, Retali, Reye, Ricci, Rice, Riesz (M.), Rindi, Rodenberg, Rosati, Rosenblatt, Rothe, Sannia (G.), Santangelo, Sbrana, Schlegel, Schmidt (E.), Schnee, Schoenflies, Schoute, Schouten, Scorza, Segre, Sellerio, Severi, Severini, Sforza, Sibirani, Sierpinski, Signorini, Silla, Sinigaglia, Sire, Slobin, Snyder, Soler, Somigliana, St  ckel, Starkoff, Steffensen, Stekloff, St  phanos, Sterne  ck (von), Strazzeri, Studnicka, Study, Shuyvaert, Sz  cs, Tamarkine, Tedesco, Tedone, Teixeira, Terracini, Tietze, Toeplitz, Toffoletti, Tonelli (L.), Torelli (G.), Torelli (R.), Tortorici, Trafelli, Turri  re, Tweedie, Tzitz  ica, Usai, Vall  e Poussin (de la), Valiron, Veblen, Veneroni, Venturi, Vergerio, Veronese, Villat, Visalli, Vitali, Viterbi, Vivanti, Voigt, Volterra, Vries (J. de), Watson, Weber (E. von), Weber (H.), Weierstrass, Weitzenb  ck, Westfall, Weyl, Wilczynski, Wilder, Young (J.W.), Young (W.H.), Zaremba, Zeuthen.

Tariffa 1   gennaio 1919:

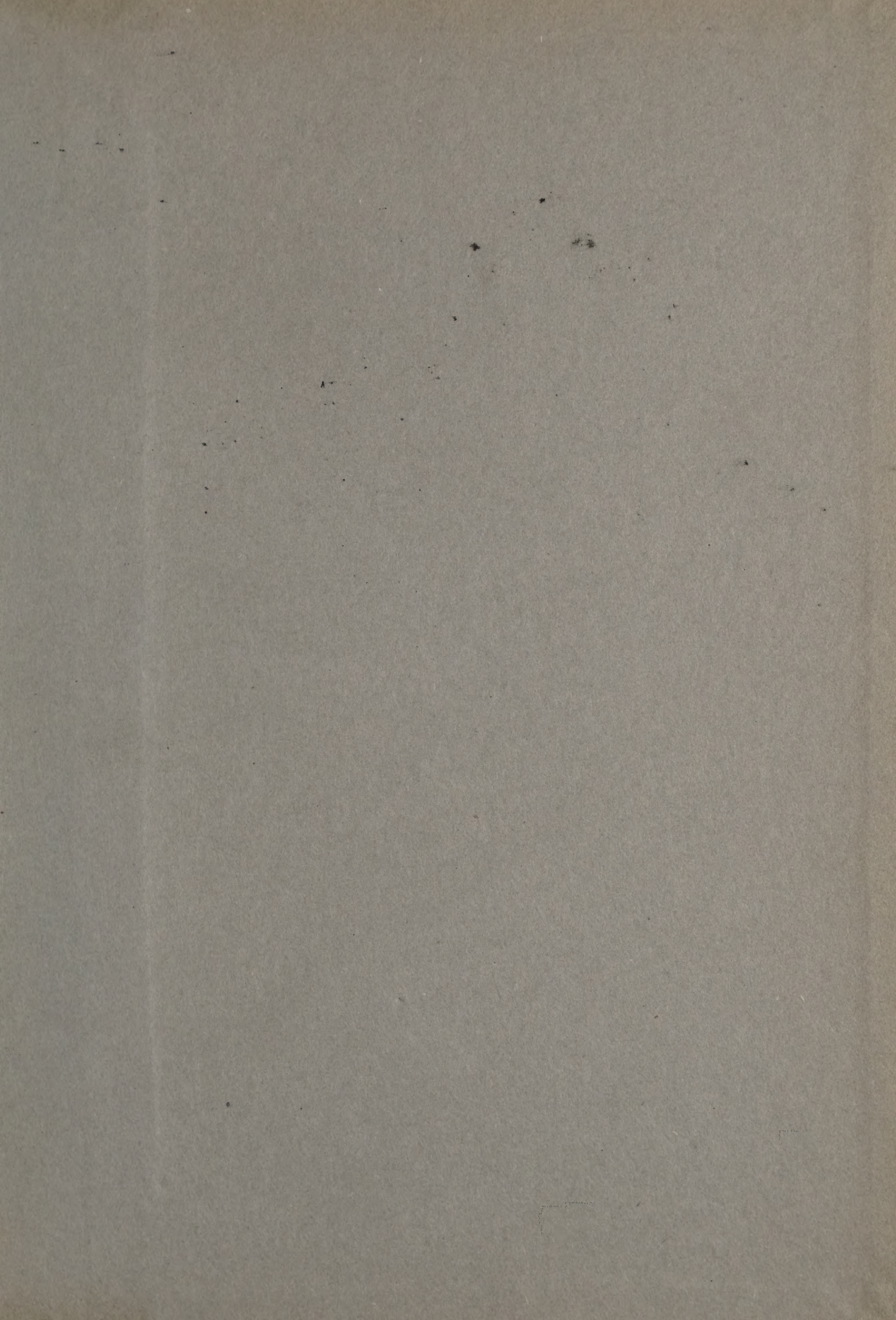
Franco di porto.	{	Collezione completa dei Tomi I-XLII (Pochi esemplari disponibili)	L. 1260	}	In oro per l'estero.
		Ciascuno dei Tomi II-XVIII, XXI-XLII, separatamente	L. 30		
(Non si vendono fascicoli separati dei Rendiconti).					

Inviare vaglia postali o ch  ques all'indirizzo:

TESORIERE DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO. 30. via Ruggiero Settimo — PALERMO (Italia).

Tipografia Matematica di Palermo, Piazza Regalmici, vicolo Guccia, 11.

(1194-11250.45) 21-4-1919



UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA

510.6C1 C001
RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PAL
42 1917



3 0112 016868785